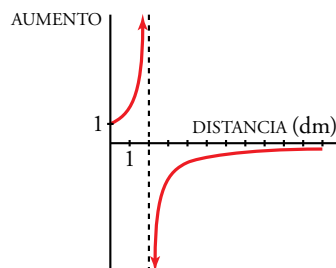


## Resuelve

Página 155

### A través de una lupa



El *aumento*  $A$  producido por cierta lupa viene dado por la siguiente ecuación:

$$A = \frac{2}{2-d}$$

donde  $d$  es la *distancia* (en decímetros) entre el objeto que queremos observar y la lupa.

Si acercamos el objeto a la lupa hasta tocarla ( $d = 0$ ), su tamaño se mantiene igual. Esto, en términos de límites, se escribe así:

$$\lim_{d \rightarrow 0} A = 1$$

¿Cómo se escribiría lo siguiente en términos de límites?

a) Si acercamos el objeto a 2 dm, aproximadamente, se hace más y más grande. Además, el objeto se verá al derecho si  $d < 2$ , o invertido, si  $d > 2$ .

$$\lim_{d \rightarrow 2^-} A = \dots$$

$$\lim_{d \rightarrow 2^+} A = \dots$$

b) Si alejamos la lupa del objeto, este se ve cada vez más pequeño.

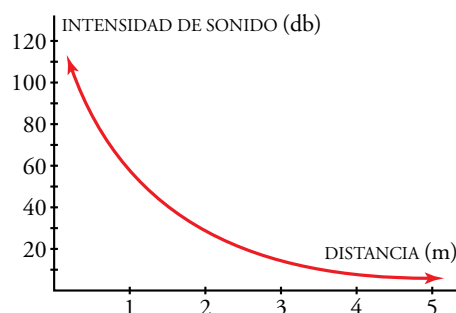
$$\lim_{d \rightarrow +\infty} A = \dots$$

a)  $\lim_{d \rightarrow 2^-} A = +\infty$

$$\lim_{d \rightarrow 2^+} A = -\infty$$

b)  $\lim_{d \rightarrow +\infty} A = 0$

### Ruido y silencio



Si acercamos la oreja a un foco de sonido, este se hace insoportable. Si la alejamos mucho, deja de oírse. Traduce estos hechos a límites, llamando  $I$  a la *intensidad del sonido* (en decibelios) y  $d$  a la *distancia* (en metros) a la que nos colocamos del foco emisor:

$$\lim_{d \rightarrow 0} I = \dots \quad \lim_{d \rightarrow +\infty} I = \dots$$

$$\lim_{d \rightarrow 0} I = +\infty \quad \lim_{d \rightarrow +\infty} I = 0$$

# 1 Visión intuitiva de la continuidad. Tipos de discontinuidades

Página 157

1 ¿Verdadero o falso?

Cada una de las siguientes funciones es continua en todos los puntos en los que está definida:

a)  $y = x^2 - 1$

b)  $y = \sqrt{x+2}$

c)  $y = \text{sen } x$

d)  $y = \text{tg } x$

e)  $y = \text{Ent}(x)$

f)  $y = \text{Mant}(x)$

g)  $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

h)  $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

i)  $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

j)  $y = \begin{cases} 5x - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Verdadero.

b) Verdadero.

c) Verdadero.

d) Verdadero.

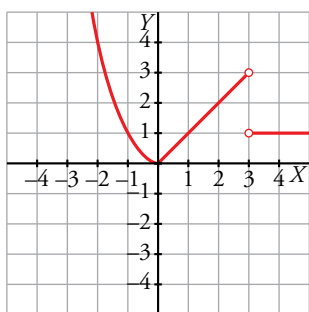
e) Falso. La función parte entera no es continua en ningún número entero, sin embargo, está definida en ellos.

f) Falso. La función mantisa no es continua en ningún número entero.

g) Verdadero.

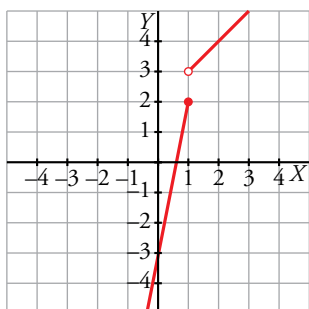
h) Verdadero.

i) Verdadero. Podemos verlo en su gráfica.



En  $x = 3$  no es continua, pero como no está definida, la afirmación es verdadera.

j) Falso. No es continua en el punto  $x = 1$  donde está definida.



**2** Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y qué tipo de discontinuidad presenta:

a)  $y = \frac{x+2}{x-3}$

b)  $y = \frac{x^2-3x}{x}$

c)  $y = \frac{x^2-3}{x}$

d)  $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

- a) Rama infinita en  $x = 3$  (asíntota vertical).  
 b) Discontinuidad evitable en  $x = 0$  (le falta ese punto).  
 c) Rama infinita en  $x = 0$  (asíntota vertical).  
 d) Salto en  $x = 4$ .

**3** Explica por qué son continuas las siguientes funciones y determina el intervalo en el que están definidas:

a)  $y = x^2 - 5$

b)  $y = \sqrt{5-x}$

c)  $y = \begin{cases} 3x-4 & \text{si } x < 3 \\ x+2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

d)  $y = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 5 \end{cases}$

- a) Está definida y es continua en todo  $\mathbb{R}$ .  
 b) Está definida y es continua en  $(-\infty, 5]$ .

Las funciones dadas mediante una expresión analítica sencilla (las que conocemos) son continuas donde están definidas.

- c) Está definida en todo  $\mathbb{R}$ . Es continua, también, en todo  $\mathbb{R}$ . El único punto en que se duda es el 3: las dos ramas toman el mismo valor para  $x = 3$ .

$$3 \cdot 3 - 4 = 9 - 4 = 5 \quad 3 + 2 = 5$$

Por tanto, las dos ramas empalman en el punto  $(3, 5)$ . La función es también continua en  $x = 3$ .

- d) También las dos ramas empalman en el punto  $(2, 2)$ . Por tanto, la función es continua en el intervalo en el que está definida:  $[0, 5)$ .

## 2 Límite de una función en un punto. Continuidad

Página 158

- 1 Para cada una de las funciones siguientes  $f_1(x) = \frac{-5}{(x-3)^2}$ ,  $f_2(x) = \frac{4}{3-x}$ ,  $f_3(x) = 2^x$ , completa en tu cuaderno la tabla adjunta, con ayuda de la calculadora, y estima el valor de  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ .

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)					

$$f_1(x) = \frac{-5}{(x-3)^2}$$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)	$\frac{-5}{(2-3)^2} = -5$	$\frac{-5}{(2,5-3)^2} = -20$	$\frac{-5}{(2,9-3)^2} = -500$	$\frac{-5}{(2,99-3)^2} = -50\,000$	$\frac{-5}{(2,999-3)^2} = -5\,000\,000$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f_1(x) = -\infty$$

$$f_2(x) = \frac{4}{3-x}$$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)	$\frac{4}{3-2} = 4$	$\frac{4}{3-2,5} = 8$	$\frac{4}{3-2,9} = 40$	$\frac{4}{3-2,99} = 400$	$\frac{4}{3-2,999} = 4\,000$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f_2(x) = +\infty$$

$$f_3(x) = 2^x$$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)	$2^2 = 4$	$2^{2,5} = 5,66$	$2^{2,9} = 7,46$	$2^{2,99} = 7,94$	$2^{2,999} = 7,99$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f_3(x) = 8$$

## 3 Cálculo de límites en un punto

### Página 160

1 Calcula razonadamente el valor de los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x-2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0,1} \log_{10} x$

a)  $-\frac{3}{2}$

b) 0

c)  $\sqrt{3}$

d) -1

### Página 161

**Hazlo tú.**  $g(x) = \begin{cases} x^3 - 5x + 3, & x \neq -2 \\ 5, & x = -2 \end{cases}$  ¿Es continua en  $x = -2$ ? Halla su límite en 0 y en 4.

• Continuidad en  $x = -2$ :

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 5x + 3) = (-2)^3 - 5 \cdot (-2) + 3 = 5$$

$$f(-2) = 5$$

Por tanto, la función es continua en  $x = -2$ .

• Límite en  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - 5x + 3) = 0^3 - 5 \cdot 0 + 3 = 3$$

• Límite en  $x = 4$ :

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (x^3 - 5x + 3) = 4^3 - 5 \cdot 4 + 3 = 47$$

**Hazlo tú.** Calcula  $k$  para que  $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + k, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$  sea continua en  $\mathbb{R}$ .

Para cualquier valor de  $k$  la función es continua en todos los puntos distintos de 3.

Estudiamos la continuidad en  $x = 3$ :

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 2x + k) = 3^3 - 2 \cdot 3 + k = 21 + k$$

$$f(3) = 7$$

Para que la función sea continua en  $x = 3$  ambos resultados deben ser iguales, luego:

$$21 + k = 7 \rightarrow k = -14$$

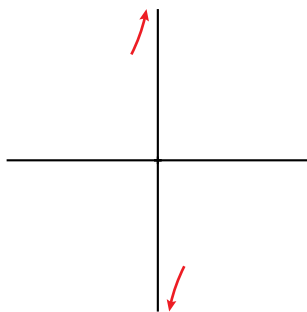
Página 163

**Hazlo tú.** Calcula a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x^2}$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2}$  y representa los resultados.

a) El denominador se anula en  $x = 0$ , pero no el numerador. Por tanto, el límite es infinito, con signo más o menos.

$$\text{IZQUIERDA: } x = -0,01 \rightarrow \frac{-0,01-3}{-0,01} = 301 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-3}{x} = +\infty$$

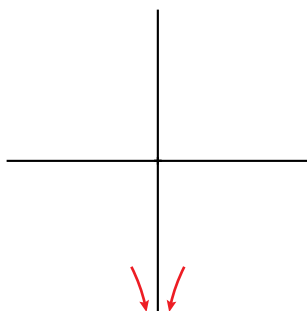
$$\text{DERECHA: } x = 0,01 \rightarrow \frac{0,01-3}{0,01} = -299 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-3}{x} = -\infty$$



b) El denominador se anula en  $x = 0$ , pero no el numerador. Por tanto, el límite es infinito, con signo más o menos.

$$\text{IZQUIERDA: } x = -0,01 \rightarrow \frac{-0,01-3}{(-0,01)^2} = -30\,100 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-3}{x^2} = -\infty$$

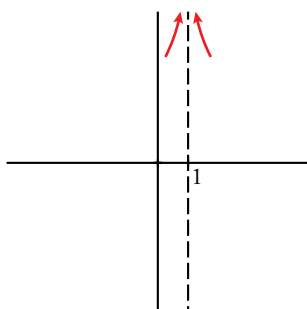
$$\text{DERECHA: } x = 0,01 \rightarrow \frac{0,01-3}{0,01^2} = -29\,900 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-3}{x^2} = -\infty$$



c) El denominador se anula en  $x = 1$ , pero no el numerador. Por tanto, el límite es infinito, con signo más o menos.

$$\text{IZQUIERDA: } x = 0,99 \rightarrow \frac{0,99^3}{(0,99-1)^2} = 9\,703 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\text{DERECHA: } x = 1,01 \rightarrow \frac{1,01^3}{(1,01-1)^2} = 10\,303 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$$



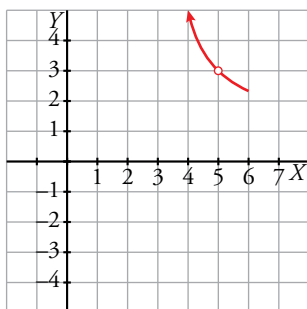
**Hazlo tú.** Calcula a)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 8x + 15}$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 5x^2}{x^2}$  y representa los resultados.

a) Tanto el numerador como el denominador se anulan en  $x = 5$ .

Simplificamos la fracción:

$$\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 8x + 15} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-3)(x-5)} = \frac{x+1}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 8x + 15} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+1}{x-3} = 3$$



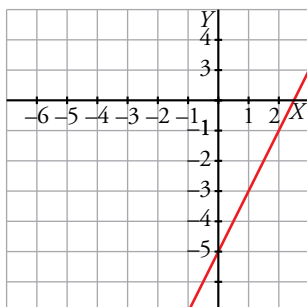
b) Tanto el numerador como el denominador se anulan en  $x = 0$ .

Simplificamos la fracción:

$$\frac{2x^3 - 5x^2}{x^2} = \frac{x^2(2x - 5)}{x^2} = 2x - 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 5x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x - 5) = -5$$

$$y = 2x - 5$$



**Hazlo tú.** Halla estos límites y representa los resultados:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2}{x^4}$

a) Tanto el numerador como el denominador se anulan en  $x = 1$ .

Simplificamos la fracción  $\rightarrow \frac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{(x+5)(x-1)}{x(x-1)^2} = \frac{x+5}{x(x-1)}$

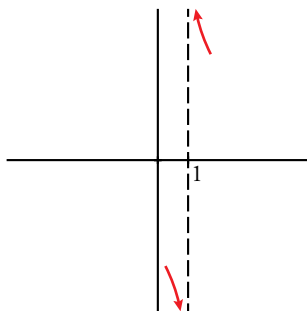
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+5}{x(x-1)} \rightarrow$  Ahora se anula el denominador, pero no el numerador. Por tanto, los límites laterales son  $\pm\infty$ .

Estudiamos el signo de la función a uno y otro lado de 1.

$$\text{IZQUIERDA: } x = 0,99 \rightarrow \frac{0,99^2 + 4 \cdot 0,99 - 5}{0,99^3 - 2 \cdot 0,99^2 + 0,99} = -605 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x} = -\infty$$

$$\text{DERECHA } x = 1,01 \rightarrow \frac{1,01^2 + 4 \cdot 1,01 - 5}{1,01^3 - 2 \cdot 1,01^2 + 1,01} = 595 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x} = +\infty$$

Por tanto, el límite pedido no existe.



b) Tanto el numerador como el denominador se anulan en  $x = 0$ .

$$\text{Simplificamos la fracción } \rightarrow \frac{x^3 + 3x^2}{x^4} = \frac{x^2(x+3)}{x^4} = \frac{x+3}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x^2} \rightarrow \text{Ahora se anula el denominador, pero no el numerador. Por tanto, los límites laterales son } \pm\infty.$$

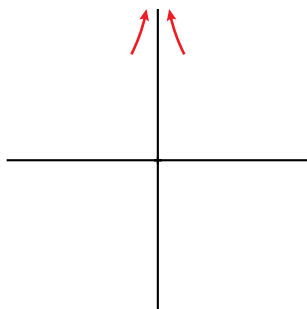
Estudiamos la función a uno y otro lado de 0.

$$\text{IZQUIERDA: } x = -0,01 \rightarrow \frac{(-0,01)^3 + 3 \cdot (-0,01)^2}{(-0,01)^4} = 29\,900 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + 3x^2}{x^4} = +\infty$$

$$\text{DERECHA } x = 0,01 \rightarrow \frac{0,01^3 + 3 \cdot 0,01^2}{0,01^4} = 30\,100 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + 3x^2}{x^4} = +\infty$$

Por tanto, el límite pedido no existe.

$$y = \frac{x+3}{x^2}$$

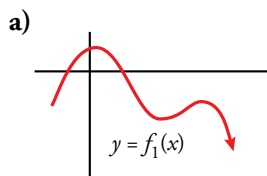




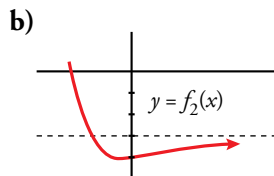
## 4 Límite de una función cuando $x \rightarrow +\infty$

Página 164

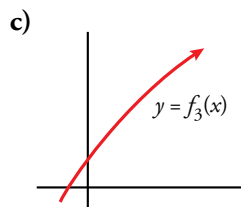
1 Di el límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:



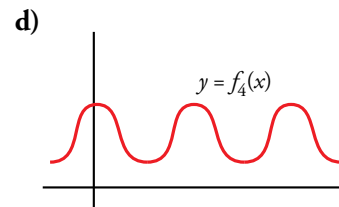
a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = -\infty$



b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = -3$



c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty$



d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x)$  no existe.

## 5 Cálculo de límites cuando $x \rightarrow +\infty$

### Página 165

1 Di el valor del límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  de las siguientes funciones:

- |                           |                            |                                |
|---------------------------|----------------------------|--------------------------------|
| a) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$ | b) $f(x) = 5x^3 + 7x$      | c) $f(x) = x - 3x^4$           |
| d) $f(x) = \frac{1}{3x}$  | e) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ | f) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$ |
| a) $-\infty$              | b) $+\infty$               | c) $-\infty$                   |
| d) 0                      | e) 0                       | f) $-\infty$                   |

2 Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 200x^2) = +\infty$ , halla un valor de  $x$  para el cual sea  $x^3 - 200x^2 > 1\,000\,000$ .

Por ejemplo, para  $x = 1\,000$ ,  $f(x) = 800\,000\,000$ .

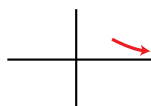
3 Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 10x} = 0$ , halla un valor de  $x$  para el cual sea  $\frac{1}{x^2 - 10x} < 0,0001$ .

Por ejemplo, para  $x = 1\,000$ ,  $f(x) = 0,000001$ .

### Página 166

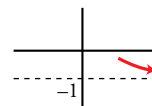
4 Calcula  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  y representa sus ramas:

- |                          |                         |                            |                    |
|--------------------------|-------------------------|----------------------------|--------------------|
| a) $f(x) = \frac{1}{3x}$ | b) $f(x) = \frac{3}{x}$ | c) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ | d) $f(x) = 3x - 5$ |
| a) 0                     | b) 0                    | c) 0                       | d) $+\infty$       |



5 Calcula  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  y representa sus ramas:

- |                                |                                 |                                 |                                     |
|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$ | b) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}$ | c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$ | d) $f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$ |
| a) $-\infty$                   | b) 0                            | c) $+\infty$                    | d) -1                               |



## 6 Límite de una función cuando $x \rightarrow -\infty$

Página 167

1 Halla los límites cuando  $x \rightarrow -\infty$  y cuando  $x \rightarrow +\infty$  de las funciones siguientes:

a)  $f(x) = -2x^3 + 7x^2$       b)  $f(x) = 3x^4 - 7x$       c)  $f(x) = 10^x$   
 d)  $f(x) = \sqrt{5x-8}$       e)  $f(x) = \sqrt{-2x^2+1}$       f)  $f(x) = -5^x$

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 7x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + 7x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 = -\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 - 7x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^4 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^4 - 7x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^4 = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 10^x = 0$

Ya que para  $x = -10, 10^{-10} = \frac{1}{10^{10}} = 0,0000000001$  y análogamente ocurriría para valores negativos de  $x$  menores que  $-10$ .

De forma similar a la anterior, podemos comprobar que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 10^x = +\infty$ .

d) El límite cuando  $x$  tiende a  $-\infty$  no tiene sentido porque la función está definida para  $x \geq \frac{8}{5}$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5x-8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5x} = +\infty$  porque el radicando tiende a  $+\infty$ .

e) No tiene sentido calcular ninguno de los dos límites porque el dominio de definición de la función es el intervalo  $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ .

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5^x = 0$

Ya que para  $x = -10, -5^{-10} = -\frac{1}{5^{10}} = -0,0000001024$  y análogamente ocurriría para valores negativos de  $x$  menores que  $-10$ .

De forma similar a la anterior, podemos comprobar que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5^x = -\infty$ .

2 Halla los límites cuando  $x \rightarrow -\infty$  y cuando  $x \rightarrow +\infty$  de las funciones siguientes:

a)  $f(x) = \sqrt{3-x}$       b)  $f(x) = \frac{x^2+3}{-x^3}$       c)  $f(x) = \frac{-x^3}{x^2+3}$       d)  $f(x) = \frac{5x^3-10}{3x^3+10x^2}$

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x} = +\infty$  porque el radicando tiende a  $+\infty$ .

El límite cuando  $x$  tiende a  $+\infty$  no tiene sentido porque la función está definida solo cuando  $x \leq 3$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+3}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-x} = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3-10}{3x^3+10x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3-10}{3x^3+10x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

## 7 Ramas infinitas. Asíntotas

Página 169

1 Determina las asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas:

$$a) y = \frac{3x+1}{x-2} \quad b) y = \frac{3x^2-7}{x-2} \quad c) y = \frac{1}{x} \quad d) y = -\frac{1}{x^2} \quad e) y = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$$

a) Como el denominador se anula cuando  $x = 2$ , estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{x-2} = \frac{7}{0} = \pm\infty$$

$$\text{IZQUIERDA: } x = 1,99 \rightarrow \frac{3 \cdot 1,99 + 1}{1,99 - 2} = -697 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x+1}{x-2} = -\infty$$

$$\text{DERECHA: } x = 2,01 \rightarrow \frac{3 \cdot 2,01 + 1}{2,01 - 2} = 703 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+1}{x-2} = +\infty$$

Por tanto, la recta  $x = 2$  es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 = 3$$

Por tanto, la recta  $y = 3$  es una asíntota horizontal.

Para saber la posición de la curva respecto de la asíntota horizontal, debemos tener en cuenta que

$$y = \frac{3x+1}{x-2} = 3 + \frac{7}{x-2}.$$

Cuando  $x \rightarrow +\infty$  el cociente  $\frac{7}{x-2}$  toma valores positivos y la función está por encima de la asíntota.

Cuando  $x \rightarrow -\infty$ , ocurre lo contrario y la función está por debajo de la asíntota.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

b) Como el denominador se anula cuando  $x = 2$ , estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-7}{x-2} = \frac{5}{0} = \pm\infty$$

$$\text{IZQUIERDA: } x = 1,99 \rightarrow \frac{3 \cdot 1,99^2 - 7}{1,99 - 2} = -488,03 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2-7}{x-2} = -\infty$$

$$\text{DERECHA: } x = 2,01 \rightarrow \frac{3 \cdot 2,01^2 - 7}{2,01 - 2} = 512,03 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2-7}{x-2} = +\infty$$

Por tanto, la recta  $x = 2$  es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-7}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-7}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty$$

Por tanto, no tiene asíntotas de este tipo.

Ahora estudiamos las asíntotas oblicuas:

$$y = \frac{3x^2-7}{x-2} = 3x + 6 + \frac{5}{x-2}$$

La recta  $y = 3x + 6$  es una asíntota oblicua ya que  $\frac{5}{x-2}$  tiende a 0 cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Cuando  $x \rightarrow +\infty$  el cociente  $\frac{5}{x-2}$  toma valores positivos y la función está por encima de la asíntota oblicua.

Cuando  $x \rightarrow -\infty$ , ocurre lo contrario y la función está por debajo de la asíntota.

- c) Como el denominador se anula cuando  $x = 0$ , estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

$$\text{IZQUIERDA: } x = -0,01 \rightarrow \frac{1}{-0,01} = -100 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\text{DERECHA: } x = 0,01 \rightarrow \frac{1}{0,01} = 100 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Por tanto, la recta  $x = 0$  es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Por tanto, la recta  $y = 0$  es una asíntota horizontal.

Cuando  $x \rightarrow +\infty$ , la función es positiva y está por encima de la asíntota horizontal. Cuando  $x \rightarrow -\infty$ , la función es negativa y está por debajo de la asíntota.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

- d) Como el denominador se anula cuando  $x = 0$ , estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-x^2} = \frac{1}{0} = -\infty \text{ porque la función siempre toma valores negativos.}$$

Por tanto, la recta  $x = 0$  es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x^2} = 0$$

Por tanto, la recta  $y = 0$  es una asíntota horizontal.

Como la función siempre toma valores negativos, está por debajo de la asíntota horizontal.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

- e) La función está definida cuando  $x^2 - 9 > 0$ , es decir, cuando  $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ . En los puntos  $-3$  y  $3$  se producen divisiones entre 0. Vamos a estudiar en ellos la existencia de asíntotas, pero solo podremos calcular límites por uno de los lados en cada punto.

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Porque la función siempre es positiva. Luego las rectas  $x = -3$  y  $x = 3$  son asíntotas verticales.

La recta  $y = 0$  es claramente una asíntota horizontal porque  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = 0$ .

Tanto si  $x \rightarrow +\infty$  como si  $x \rightarrow -\infty$ , la función queda por encima de la asíntota horizontal por tomar valores positivos.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

## 8 Ramas infinitas en las funciones racionales

Página 171

1 Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones y, a partir de ellas, perfila la forma de la curva:

a)  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

b)  $y = \frac{x}{1 + x^2}$

c)  $y = \frac{x^4}{x^2 + 1}$

d)  $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$

e)  $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$

f)  $y = \frac{x^3}{1 + x^2}$

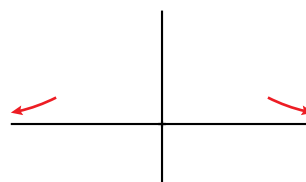
g)  $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$

h)  $y = \frac{2x^3 - 3x^2}{x}$

a) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula.

Ramas en el infinito:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$ . Asíntota:  $y = 0$

Como la función siempre es positiva, queda por encima de la asíntota.

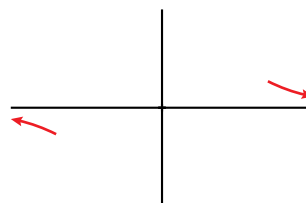


b) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula.

Ramas en el infinito:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1 + x^2} = 0$ . Asíntota:  $y = 0$

Estudiamos el signo de su diferencia con la asíntota:

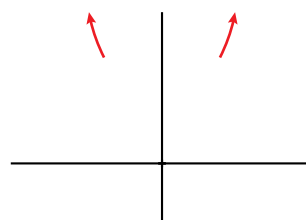
$$f(x) - 0 = \frac{x}{1 + x^2} \begin{cases} + & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ - & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$



c) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula.

Ramas en el infinito: como *grado de P(x) - grado de Q(x) = 2*, tiene una rama parabólica cuando  $x \rightarrow -\infty$  y otra cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4}{x^2 + 1} = +\infty \rightarrow$  Las ramas parabólicas son hacia arriba.



d) Asíntotas verticales. Obtenemos las raíces del denominador:

$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$  son asíntotas porque el numerador no se anula en estos valores.

Estudiamos la posición de la curva respecto a ellas:

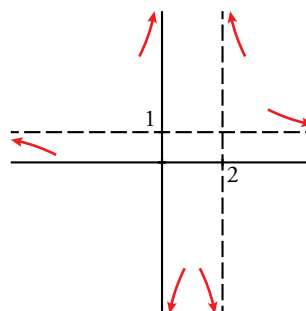
x	PRÓXIM. x = 0		PRÓXIM. x = 2	
	-0,01	0,01	1,99	2,01
$\frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$	+	-	-	+

Ramas en el infinito:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x} = 1$ . Asíntota:  $y = 1$ .

Estudiamos la posición de la curva respecto de la asíntota:

$$f(x) - 1 = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x} - 1 = \frac{2 + 2x}{x^2 - 2x} \begin{cases} + & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ - & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

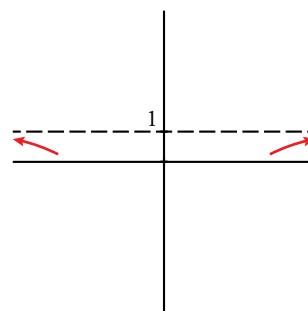


e) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula.

Ramas en el infinito:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$ . Asíntota:  $y = 1$

Estudiamos el signo de su diferencia con la asíntota:

$$f(x) - 1 = \frac{-1}{1+x^2} \begin{cases} - & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ - & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$



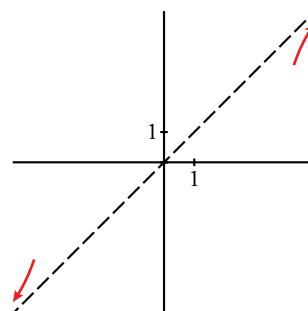
f) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula nunca.

Ramas en el infinito: como  $\text{grado de } P(x) - \text{grado de } Q(x) = 1$ , tiene una asíntota oblicua.

$$y = \frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{x^2+1} \rightarrow \text{La recta } y = x \text{ es la asíntota.}$$

Estudiamos la posición de la curva respecto de la asíntota:

$$f(x) - x = \frac{-x}{x^2+1} \begin{cases} - & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ + & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$



g) Asíntota vertical:  $x = -1$  porque se anula el denominador y no el numerador.

Estudiamos su posición:

$$\text{IZQUIERDA: } f(-1,01) = \frac{(-1,01)^2 + 3 \cdot (-1,01)}{-1,01 + 1} = 200,99 \text{ (positivo)}$$

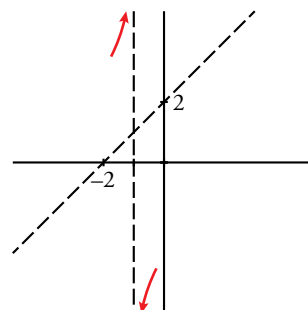
$$\text{DERECHA: } f(-0,99) = \frac{(-0,99)^2 + 3 \cdot (-0,99)}{-0,99 + 1} = -198,99 \text{ (negativo)}$$

Ramas en el infinito: como  $\text{grado de } P(x) - \text{grado de } Q(x) = 1$ , tiene una asíntota oblicua.

$$y = \frac{x^2 + 3x}{x+1} = x + 2 - \frac{2}{x+1} \rightarrow \text{La recta } y = x + 2 \text{ es la asíntota.}$$

Estudiamos la posición de la curva respecto de la asíntota:

$$f(x) - (x + 2) = \frac{-2}{x+1} \begin{cases} - & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ + & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

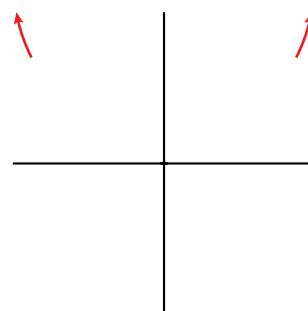


h) Asíntota vertical. El valor  $x = 0$  anula el denominador pero también el numerador. Si  $x \neq 0$  podemos simplificar la fracción:

$$\frac{2x^3 - 3x^2}{x} = 2x^2 - 3x$$

Por tanto, la función dada coincide con una parábola salvo que en el punto  $x = 0$  tiene una discontinuidad del tipo III, ya que no está definida.

No tiene asíntota vertical y las ramas en el infinito son parabólicas (ambas hacia arriba).

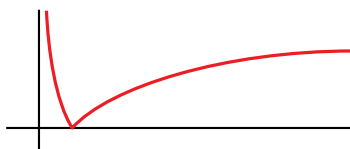


## 9 Ramas infinitas en las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas

Página 172

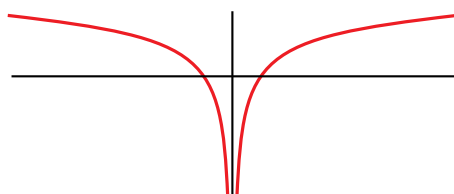
1 ¿Verdadero o falso?

a) La función  $y = |\log_2 x|$  se representa así:



Tiene dos ramas infinitas: una asíntota vertical en  $y = 0$  y una rama parabólica cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

b) La función  $y = \log_2 |x|$  se representa así:



Tiene una asíntota vertical en  $x = 0$  y sendas ramas parabólicas en  $-\infty$  y en  $+\infty$ .

a) Verdadero.

b) Verdadero.



## Ejercicios y problemas resueltos

Página 173

### 2. Límites y continuidad de una función definida "a trozos"

**Hazlo tú.** Halla el límite de la función  $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{si } x < 3 \\ x - 2, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$  en  $x = 0$  y en  $x = 3$ . Estudia su continuidad.

En  $x = 0$ , como  $0 < 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x - 3) = -3$

$x = 3$  es un "punto de ruptura". Por ello, calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x - 3) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 2) = 1 \end{cases} \rightarrow \text{No coinciden; por tanto, no existe el límite.}$$

Esta función es discontinua en  $x = 3$ , porque el límite en ese punto no existe. Tiene un salto finito en él. Para los demás valores de  $x$ , la función es continua porque está formada por trozos de rectas.

### 3. Cálculo del límite en un punto

**Hazlo tú.** Calcula:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 2x}$       b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{(x + 2)^2}$

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 2x} = \frac{0}{0}$ . Indeterminación. Tenemos que simplificar la fracción.

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 2x} = \frac{(x - 1)^2}{2x(x - 1)} = \frac{x - 1}{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{2x} = 0$$

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{(x + 2)^2} = \frac{-2}{0} = -\infty$  porque el denominador siempre es positivo y el numerador siempre es negativo en las proximidades del punto  $x = -2$ . (En este caso no son necesarios los límites laterales).

Página 174

### 4. Función continua en un punto

**Hazlo tú.** Halla el valor de  $k$  para que la función  $f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x \leq 1 \\ x + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$  sea continua en todo  $\mathbb{R}$ .

La función es continua si  $x \neq 1$  porque está formada por dos trozos de rectas.

Estudiamos la continuidad en el "punto de ruptura"  $x = 1$ :

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 5) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + k) = 1 + k \end{cases}$$

Para que exista el límite debe ser  $-3 = 1 + k \rightarrow k = -4$

Si  $k = -4$  se cumplen todas las condiciones para que sea continua en  $x = 1$  y, por tanto, en todo  $\mathbb{R}$ .

## 5. Cálculo de límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$

**Hazlo tú.** Calcula  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  en los siguientes casos:

a)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$       b)  $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2}$       c)  $f(x) = \frac{x^2}{x - 5}$       d)  $f(x) = \frac{5x + 3}{x^2 - 2}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 - 1} = +\infty$  porque el radicando es tan grande como queramos dando a  $x$  valores muy grandes.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2 - 1} = +\infty \text{ por una razón análoga a la anterior.}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{-2} = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2}{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{-2} = -2$$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 3}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 3}{x^2 - 2} = 0$  porque el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

### Página 175

## 6. Ramas infinitas y asíntotas

**Hazlo tú.** Estudia las asíntotas de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{3x - 1}{x - 2}$       b)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$

a) • Asíntotas verticales:

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 1}{x - 2} = \frac{5}{0} = \pm\infty \rightarrow x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow 2^-, \left( f(x) = \frac{+}{-} = - \right) f(x) \rightarrow -\infty$$

$$\text{Si } x \rightarrow 2^+, \left( f(x) = \frac{+}{+} = + \right) f(x) \rightarrow +\infty$$

• Asíntotas horizontales:

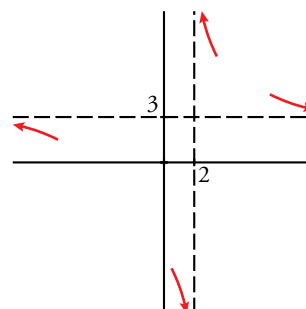
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x - 1}{x - 2} = 3; y = 3 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Estudiamos la posición de la curva.

$$f(x) - 3 = \frac{3x - 1}{x - 2} - 3 = \frac{5}{x - 2}$$

Si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) - 3 > 0$ . La curva está sobre la asíntota.

Si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) - 3 < 0$ . La curva está bajo de la asíntota.



b) • Asíntotas verticales. No tiene porque su denominador nunca se anula.

• Asíntotas horizontal u oblicua.

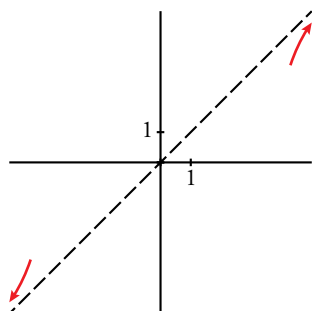
Como el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador, hay asíntota oblicua.

Dividiendo obtenemos:

$$\frac{x^3}{x^2+2} = x - \frac{2x}{x^2+2} \rightarrow y = x \text{ es asíntota oblicua.}$$

Estudiamos la posición:

$$d = f(x) - y = -\frac{2x}{x^2+2} \begin{cases} \text{Si } x \rightarrow +\infty \text{ (} d < 0 \text{)} & f(x) < y \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty \text{ (} d > 0 \text{)} & f(x) > y \end{cases}$$



## Ejercicios y problemas guiados

Página 176

### 1. Límites de una función definida "a trozos"

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 3x - 5 & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 9x - x^2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

hallar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (9x - x^2) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- Como  $x = 0$  es un punto de ruptura, debemos calcular límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x - 5) = -5$$

El límite en  $x = 0$  no existe.

### 2. Límites en el infinito

Calcular los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$     b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x}}{x + 1}$     c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 3}{x - 2}}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$  porque el numerador tiene grado 1 y el denominador también, ya que  $\sqrt{x^2} = x$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x}}{x + 1} = 0$  porque el grado del numerador sería  $\frac{1}{2}$  y es menor que el grado del denominador, que es 1.

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 3}{x - 2}} = +\infty$  porque el radicando tiende a  $+\infty$  al ser un cociente de polinomios en el que el grado del numerador es mayor que el del denominador.

### 3. Asíntotas

Determinar  $a$  y  $b$  para que las rectas  $x = 2$  e  $y = 4$  sean asíntotas de la función  $f(x) = \frac{ax - 5}{3x + b}$ .

Para que la recta  $x = 2$  sea una asíntota de  $f(x)$ , el denominador se debe anular en la abscisa dada. Por tanto:

$$3 \cdot 2 + b = 0 \rightarrow b = -6$$

Para que la recta  $y = 4$  sea una asíntota horizontal, debe ser  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 4$ .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax - 5}{3x + b} = \frac{a}{3} \text{ por ser un cociente de polinomios del mismo grado.}$$

$$\frac{a}{3} = 4 \rightarrow a = 12 \rightarrow \text{La función es } f(x) = \frac{12x - 5}{3x - 6}.$$

#### 4. Ramas infinitas

Estudiar y representar las ramas infinitas de las funciones siguientes:

a)  $f(x) = 1,5^x$       b)  $f(x) = 0,4^x$       c)  $f(x) = \ln(2x - 4)$

a) • Asíntotas verticales. No tiene por ser continua.

• Asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1,5^x = +\infty \text{ por ser una función exponencial con base mayor que 1.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1,5^x = 0 \text{ por el mismo motivo.}$$

Luego  $y = 0$  es una asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

Tiene una rama parabólica cuando  $x \rightarrow +\infty$ .



b) • Asíntotas verticales. No tiene por ser continua.

• Asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 0,4^x = 0 \text{ por ser una función exponencial con base menor que 1.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,4^x = +\infty \text{ por el mismo motivo.}$$

Luego  $y = 0$  es una asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

Tiene una rama parabólica cuando  $x \rightarrow -\infty$ .



c) El dominio de definición de la función es el intervalo  $(2, +\infty)$  ya que se debe cumplir que  $2x - 4 > 0$ . En el dominio es una función continua y no tiene asíntotas verticales.

Estudiamos el comportamiento cerca del punto  $x = 2$  por la derecha. Podemos verlo evaluando algunos puntos.

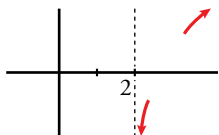
$$x = 2,001 \rightarrow \ln(2 \cdot 2,001 - 4) = -6,2$$

$$x = 2,0001 \rightarrow \ln(2 \cdot 2,0001 - 4) = -8,5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(2x - 4) = -\infty$$

Luego  $x = 2$  es una asíntota vertical cuando  $x \rightarrow 2^+$ .

Tiene una rama parabólica en el infinito de crecimiento cada vez más lento hacia arriba por ser una función logarítmica y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x - 4) = +\infty$ .



## 5. Existencia de asíntotas

¿Tiene alguna asíntota la siguiente función?:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3}$$

¿Qué relación hay entre su gráfica y la de  $g(x) = x^2 - 4$ ?

- Asíntotas verticales:

Estudiamos el comportamiento de la función en  $x = 3$ , punto que anula el denominador.

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = \frac{0}{0}$ . Indeterminación. Tenemos que simplificar la fracción:

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x^2 - 4)}{x - 3} = x^2 - 4$$

Luego  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 4) = 5$

Por tanto, en el punto  $x = 3$  no tiene asíntota vertical. En ese punto hay una discontinuidad del tipo III.

- Ramas en el infinito:

Si  $x \neq 3 \rightarrow f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = x^2 - 4 = g(x)$

Luego la función es una parábola salvo en el punto  $x = 3$ , donde no está definida.

Tiene dos ramas parabólicas hacia arriba cuando  $x \rightarrow -\infty$  y  $x \rightarrow +\infty$  ya que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ .

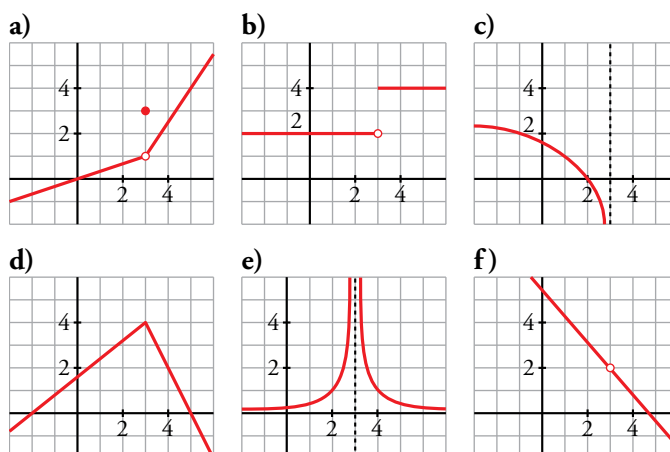
## Ejercicios y problemas propuestos

Página 177

### Para practicar

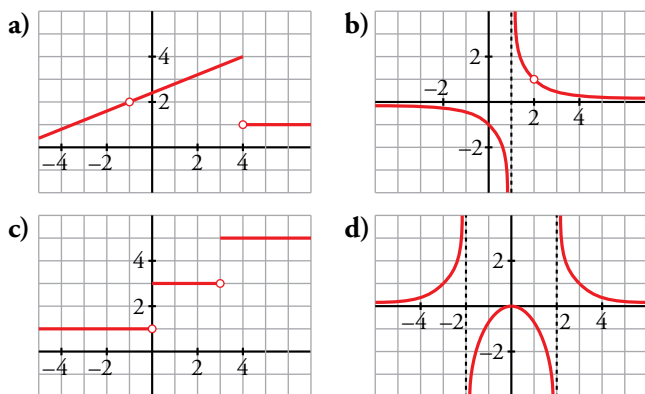
#### Continuidad y límite en un punto

1 ¿Cuál de estas funciones es continua en  $x = 3$ ? Señala, en cada una de las otras, la razón de su discontinuidad:



- a) Discontinuidad de tipo IV en  $x = 3$ , porque el valor de la función no coincide con el límite en el punto.
- b) Discontinuidad de salto finito (tipo II). La función existe en  $x = 3$ , pero los límites laterales, aunque existen, son distintos.
- c) Discontinuidad de salto infinito (tipo I). Tiene un asíntota vertical por la izquierda en  $x = 3$ .
- d) Continua.
- e) Discontinuidad de salto infinito (tipo I). Tiene una asíntota vertical en  $x = 3$ .
- f) Discontinuidad de tipo III. La función no está definida en  $x = 3$ , pero existe el límite en dicho punto.

2 Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y el tipo de discontinuidad:



- a) Discontinuidad de tipo III en  $x = -1$ .  
Discontinuidad de salto finito en  $x = 4$  (tipo II).
- b) Discontinuidad de salto infinito en  $x = 1$  (tipo I).  
Discontinuidad de tipo III en  $x = 2$ .
- c) Discontinuidades de salto finito en  $x = 0$  y  $x = 3$  (tipo II).
- d) Discontinuidades de salto infinito en  $x = -2$  y  $x = 2$  (tipo I).

**3** Comprueba que solo una de las siguientes funciones es continua en  $x = 1$ . Explica la razón de la discontinuidad en las demás:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \text{c) } f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 1 \\ x-3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{d) } f(x) = \frac{1}{x-1}$$

a) La función no está definida en  $x = 1$ . Por otro lado:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+2) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 = 3 \end{cases} \quad \text{Luego existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

Por tanto, tiene una discontinuidad de tipo III en  $x = 1$ .

b)  $f(1) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2$$

En este caso, tiene una discontinuidad de tipo IV.

c)  $f(1) = 1 - 3 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} -2 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-3) = -2 \end{cases}$$

Esta función es continua en  $x = 1$ .

d) La función no está definida en  $x = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

$$\bullet \text{ Si } x \rightarrow 1^- \left( f(x) = \frac{+}{-} = - \right) f(x) \rightarrow -\infty$$

$$\bullet \text{ Si } x \rightarrow 1^+ \left( f(x) = \frac{+}{+} = + \right) f(x) \rightarrow +\infty$$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I) en  $x = 1$ .

**4** Indica para qué valores de  $\mathbb{R}$  son continuas las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = \sqrt{x^2 + 2} \quad \text{b) } y = \frac{2}{x^4 + 3x^3} \quad \text{c) } y = \sqrt{5 - 2x}$$

$$\text{d) } y = \ln(x + 4) \quad \text{e) } y = 2^{3-x} \quad \text{f) } y = |x - 5|$$

a) Continua en  $\mathbb{R}$ .

Su dominio de definición es  $\mathbb{R}$  y su expresión analítica es elemental.

b) Veamos si se anula el denominador de la fracción:

$$x^4 + 3x^3 = 0 \rightarrow x^3(x+3) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -3$$

La función es continua en su dominio de definición, es decir, en  $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$ .

c) Para calcular su dominio resolvemos  $5 - 2x \geq 0$ . El intervalo solución  $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$  es el conjunto de valores donde la función es continua.

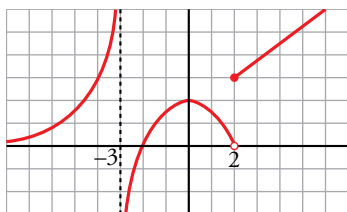
d) La expresión analítica de esta función es elemental, luego es continua en su dominio, es decir, en  $(-4, +\infty)$ .

e) Análogamente al caso anterior, es continua en  $\mathbb{R}$  porque siempre está definida.

f) Es continua en  $\mathbb{R}$  porque siempre está definida y su expresión analítica es elemental.



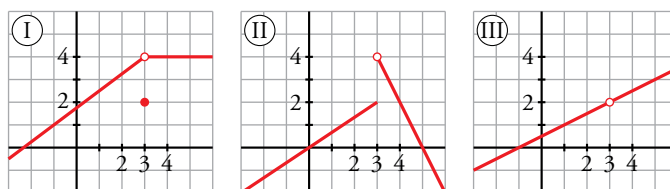
5 Sobre la gráfica de la siguiente función  $f(x)$ , halla:



- a)  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$       b)  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$       c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$       e)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$       f)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$   
 a)  $+\infty$                       b)  $-\infty$                       c) 2  
 d) 0                              e) 3                              f) 0

6 Relaciona cada una de estas expresiones con su gráfica correspondiente:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$     b)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$     c)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  no existe



¿Alguna de ellas es continua en  $x = 3$ ?

- a) III      b) I      c) II

Ninguna es continua en  $x = 3$ .

7 Calcula los siguientes límites:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{x}{2}\right)$       b)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x)$       c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x}{x-2}$       d)  $\lim_{x \rightarrow 0,5} 2^x$   
 e)  $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{10+x-x^2}$       f)  $\lim_{x \rightarrow 4} \log_2 x$       g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$       h)  $\lim_{x \rightarrow 2} e^x$   
 a) 5                              b) 0                              c) -2                              d)  $\sqrt{2}$   
 e) 2                              f) 2                              g) 1                              h)  $e^2$

8 Dada la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ , halla:

- a)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$   
 a) 5  
 b) 4  
 c)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

**9** Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x < -1 \\ x^2+3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases} \text{ en } x = -1$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 2^{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ en } x = 1$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{si } x < 0 \\ x-2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{ en } x = 0$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x < 2 \\ 2x-6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \text{ en } x = 2$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} 5-x & \text{si } x < 3 \\ \frac{2}{x-2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \text{ en } x = 3$$

Todos los puntos analizados son "puntos de ruptura", luego los límites en ellos se estudian mediante los límites laterales.

$$\text{a) } f(-1) = (-1)^2 + 3 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} (3-x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2+3) = 4 \end{cases} \text{ La función es continua en } x = -1.$$

b)  $f(1)$  no está definido.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 2^{x-1} = 1 \end{cases} \text{ La función tiene una discontinuidad del tipo III en } x = 1.$$

$$\text{c) } f(0) = 0 - 2 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{4-x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-2) = -2 \end{cases} \text{ La función tiene una discontinuidad de salto finito (tipo II) en } x = 0.$$

$$\text{d) } f(2) = 2 \cdot 2 - 6 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} (2-x^2) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-6) = -2 \end{cases} \text{ La función es continua en } x = 2.$$

$$\text{e) } f(3) = \frac{2}{3-2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} (5-x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{x-2} = 2 \end{cases} \text{ La función es continua en } x = 3.$$

**Página 178**

**10** Estas funciones, ¿son discontinuas en algún punto?:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq -1 \\ -1 & \text{si } x = -1 \end{cases} \quad \text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x} & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{d) } f(x) = \begin{cases} 2^{x-3} & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) La función está formada por un trozo de parábola y otro de recta, luego el único punto posible de discontinuidad sería el punto de ruptura. Estudiamos la continuidad en él.

$$f(1) = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0 \end{cases}$$

La función también es continua en  $x = 1$ , por tanto, no es discontinua en ningún punto.

- b) Esta función coincide con la parábola  $y = x^2$  salvo en el punto  $x = -1$ . Luego tiene una discontinuidad de tipo IV en dicho punto.
- c) La función está formada por un trozo de hipérbola y otro de recta, luego el único punto posible de discontinuidad sería el punto de ruptura. Estudiamos la continuidad en él.

$$f(2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2 \end{cases}$$

La función también es continua en  $x = 2$ , por tanto, no tiene discontinuidades.

- d) La función está formada por dos trozos de funciones cuyas expresiones analíticas son elementales (correctamente definidas), luego el único punto posible de discontinuidad sería el punto de ruptura. Estudiamos la continuidad en él.

$f(3)$  no está definido.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} 2^{x-3} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x-3} = 0 \end{cases} \text{ En el punto } x = 3 \text{ hay una discontinuidad de salto finito (tipo II).}$$

**11** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$  calcula:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$       b)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$       c)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

a) Como  $0 < 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ .

b)  $x = 3$  es el punto de ruptura. Usaremos límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} 2x = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación.} \end{cases}$$

Para calcular el límite por la derecha necesitamos simplificar la fracción:

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+3}{x} = 2$$

Luego los límites laterales son distintos y  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  no existe.

c) Como  $5 > 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{8}{5}$ .

**12** En la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < -1 \\ 3x - 1 & \text{si } -1 \leq x < 4 \\ 4\sqrt{x} + 3 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$  halla:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$       b)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$       c)  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

a)  $x = -1$  es un punto de ruptura. Usaremos límites laterales para calcular el límite.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - 2) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x - 1) = -4 \end{cases} \text{ Por tanto, no existe el límite.}$$

b)  $x = 4$  es un punto de ruptura. Usaremos límites laterales para calcular el límite.

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} (3x - 1) = 11 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} (4\sqrt{x} + 3) = 11 \end{cases} \text{ Por tanto, } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 11$$

c) Como  $9 > 4$ ,  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9} (4\sqrt{x} + 3) = 15$

**13** Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x^2 - 2x}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x}{x}$       c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$       d)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$       f)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$       g)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$       h)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x(x - 2)} = -2$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x + 3)}{x} = 3$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = 2$

d)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x(x + 1)} = \frac{3}{-1} = -3$

e)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} = -\frac{1}{4}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 2)} = 3$

g)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)}{(x + 3)(x + 1)} = -\frac{1}{2}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = 2$

**14** Resuelve los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x - 1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2}$

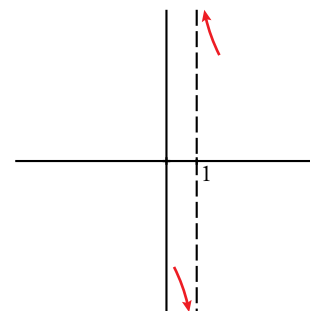
c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2}{x^2 + 2x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^4 - 10x^2}$

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x - 1} = \frac{1}{0} = \pm \infty$

• Si  $x \rightarrow 1^- \rightarrow \left( f(x) = \frac{+}{-} = - \right) f(x) \rightarrow -\infty$

• Si  $x \rightarrow 1^+ \rightarrow \left( f(x) = \frac{+}{+} = + \right) f(x) \rightarrow +\infty$

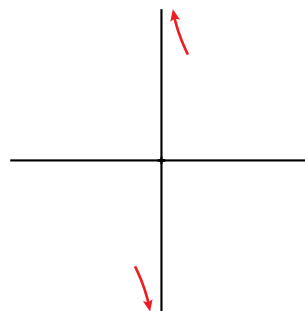


b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2} = \frac{0}{0} \rightarrow$  Indeterminación.

$$\frac{x^2 + x}{x^2} = \frac{x(x+1)}{x^2} = \frac{x+1}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

• Si  $x \rightarrow 0^- \rightarrow \left( f(x) = \frac{+}{-} = - \right) f(x) \rightarrow -\infty$

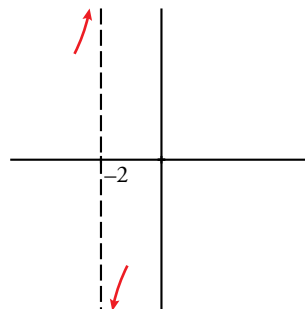
• Si  $x \rightarrow 0^+ \rightarrow \left( f(x) = \frac{+}{+} = + \right) f(x) \rightarrow +\infty$



c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2}{x^2 + 2x} = \frac{4}{0} = \pm \infty$

• Si  $x \rightarrow -2^- \rightarrow \left( f(x) = \frac{+}{+} = + \right) f(x) \rightarrow +\infty$

• Si  $x \rightarrow -2^+ \rightarrow \left( f(x) = \frac{+}{-} = - \right) f(x) \rightarrow -\infty$



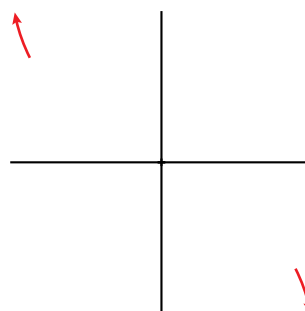
d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^4 - 10x^2} = \frac{0}{0} \rightarrow$  Indeterminación.

$$\frac{x^3}{x^4 - 10x^2} = \frac{x^3}{x^2(x^2 - 10)} = \frac{x}{x^2 - 10}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^4 - 10x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 - 10} = 0$$

$f(0)$  no está definido.

Si  $x < 0$ ,  $f(x) > 0$  y si  $x > 0$ ,  $f(x) < 0$



**15** Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

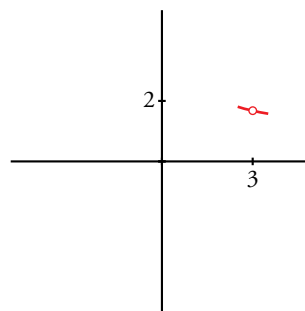
f)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4}$

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \frac{0}{0} \rightarrow$  Indeterminación.

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \frac{(x+2)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x+2}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x} = \frac{5}{3}$$

Dando a  $x$  valores próximos a 3 podemos averiguar cómo se acerca por ambos lados.



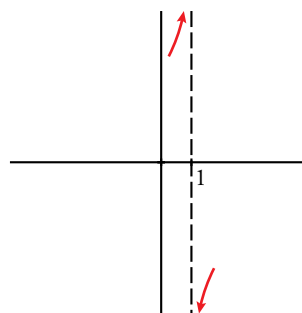
b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{0}{0} \rightarrow$  Indeterminación.

Simplificamos:  $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x-2}{x-1}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x-1} = \infty$

• Si  $x \rightarrow 1^- \rightarrow (f(x) = \frac{-}{-} = +) f(x) \rightarrow +\infty$

• Si  $x \rightarrow 1^+ \rightarrow (f(x) = \frac{-}{+} = -) f(x) \rightarrow -\infty$



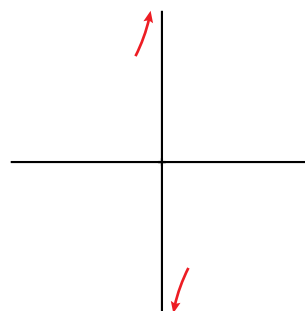
c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \frac{0}{0} \rightarrow$  Indeterminación.

$\frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \frac{x(x-2)}{x^2(x+1)} = \frac{x-2}{x(x+1)}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x(x+1)} = \frac{-2}{0} = \pm\infty$

• Si  $x \rightarrow 0^- \rightarrow (f(x) = \frac{-}{-} = +) f(x) \rightarrow +\infty$

• Si  $x \rightarrow 0^+ \rightarrow (f(x) = \frac{-}{+} = -) f(x) \rightarrow -\infty$



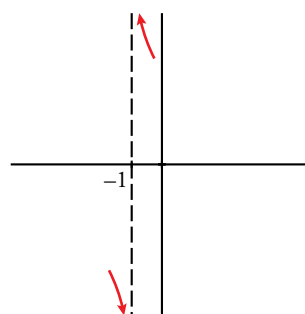
d)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{0}{0} \rightarrow$  Indeterminación.

$\frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x^2(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{x+1}$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$

• Si  $x \rightarrow -1^- \rightarrow (f(x) = \frac{+}{-} = -) f(x) \rightarrow -\infty$

• Si  $x \rightarrow -1^+ \rightarrow (f(x) = \frac{+}{+} = +) f(x) \rightarrow +\infty$

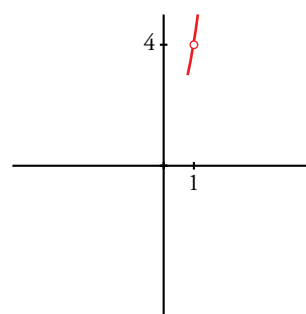


e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \rightarrow$  Indeterminación.

$\frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{(x - 1)} = \frac{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = (x^2 + 1)(x + 1)$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} [(x^2 + 1)(x + 1)] = 4$

Dando a  $x$  valores próximos a 1 podemos averiguar cómo se acerca por ambos lados.



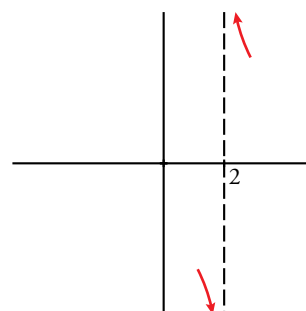
f)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \frac{0}{0} \rightarrow$  Indeterminación.

$\frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{2(x+2)}{x-2}$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+2)}{x-2} = \frac{8}{0} = \pm\infty$

• Si  $x \rightarrow 2^- \rightarrow (f(x) = \frac{+}{-} = -) f(x) \rightarrow -\infty$

• Si  $x \rightarrow 2^+ \rightarrow (f(x) = \frac{+}{+} = +) f(x) \rightarrow +\infty$



**16** Calcula.

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{7-5x}{x^2+1} \right)^{2-5x}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \log_2 \left( \frac{3x+4}{x^2+1} \right)^5$       c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+e^x}{\ln(x+e)}$       d)  $\lim_{x \rightarrow 10} \log(2\sqrt{3x-5})^3$

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{7-5x}{x^2+1} \right)^{2-5x} = \left( \frac{7-5 \cdot 1}{1^2+1} \right)^{-3} = 1$

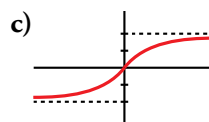
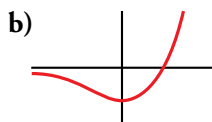
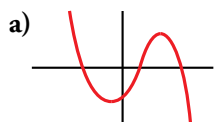
b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \log_2 \left( \frac{3x+4}{x^2+1} \right)^5 = \log_2 \left( \frac{3 \cdot 2+4}{2^2+1} \right)^5 = 5$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+e^x}{\ln(x+e)} = \frac{1+e^0}{\ln(0+e)} = 2$  por estar definida y ser continua en  $x = 0$ .

d)  $\lim_{x \rightarrow 10} \log(2\sqrt{3x-5})^3 = \log(2\sqrt{3 \cdot 10-5})^3 = 3$

■ Límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  y  $x \rightarrow -\infty$

**17** Determina cuál es el límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$  en las siguientes gráficas:



a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$

**18** Calcula el límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$  de cada una de las siguientes funciones. Representa los resultados que obtengas.

a)  $f(x) = x^3 - 10x$

b)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

c)  $f(x) = 7 - 3x$

d)  $f(x) = -x^2 + 8x + 9$

e)  $f(x) = 1 - (x-2)^2$

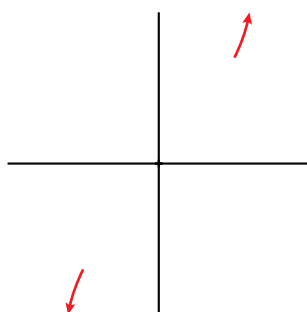
f)  $f(x) = 7x^2 - x^3$

g)  $f(x) = (5-x)^2$

h)  $f(x) = (x+1)^3 - 2x^2$

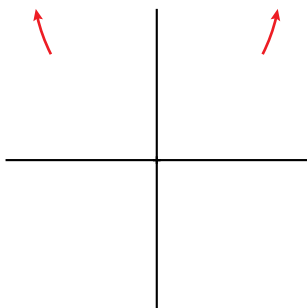
a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 10x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 10x) = -\infty$



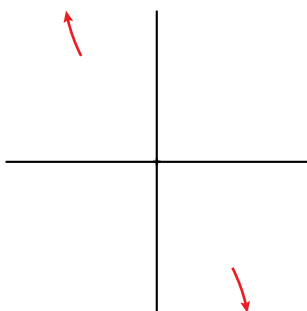
b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$



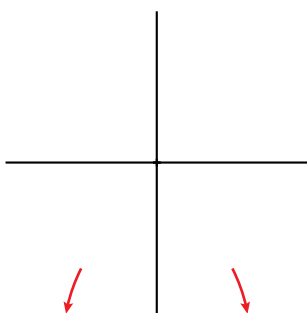
c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 - 3x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (7 - 3x) = +\infty$



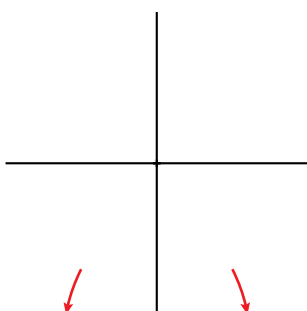
d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 8x + 9) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 8x + 9) = -\infty$



e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [1 - (x - 2)^2] = -\infty$

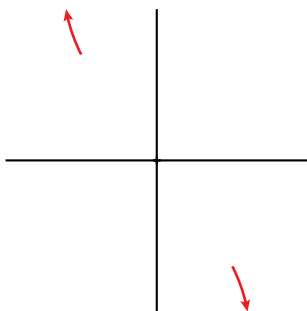
$\lim_{x \rightarrow -\infty} [1 - (x - 2)^2] = -\infty$





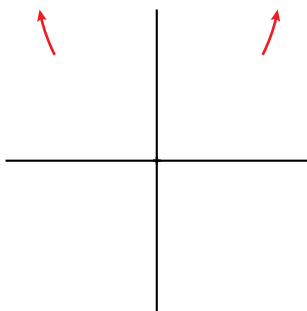
$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} (7x^2 - x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^2 - x^3) = +\infty$$



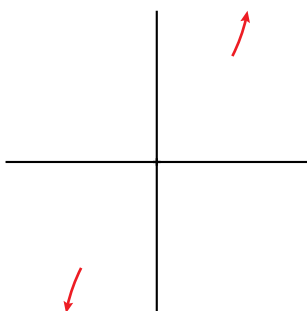
$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} (5 - x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (5 - x)^2 = +\infty$$



$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x + 1)^3 - 2x^2] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(x + 1)^3 - 2x^2] = -\infty$$



**19** Calcula estos límites y representa las ramas que obtengas:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x-1)^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{3-x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2-1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2-x)^3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{1-x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-3x}{x+3}$$

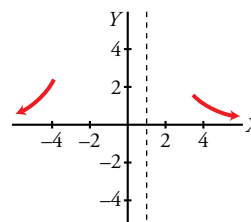
$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x}{5-2x}$$

**20** Calcula el límite de todas las funciones del ejercicio anterior cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

Resolución de los ejercicios 19 y 20:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = 0$



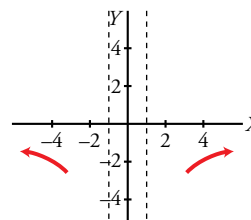
b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{3-x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{3-x} = -\infty$



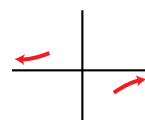
c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2-1} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2-1} = 0$



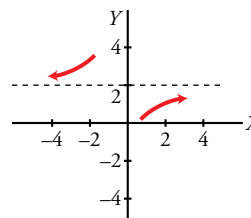
d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2-x)^3} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(2-x)^3} = 0$



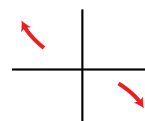
e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$



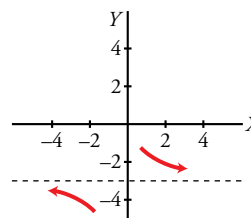
f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{1-x} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+5}{1-x} = +\infty$



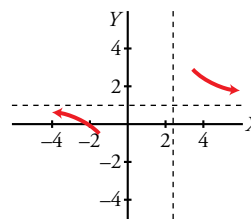
g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-3x}{x+3} = -3$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-3x}{x+3} = -3$



h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x}{5-2x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x}{5-2x} = 1$



**21** Calcula el límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$  y representa los resultados.

a)  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

b)  $f(x) = \frac{3x^2}{(x-1)^2}$

c)  $f(x) = \frac{1}{x^2-10}$

d)  $f(x) = \frac{1-12x^2}{3x^2}$

e)  $f(x) = \frac{5-2x}{x^2+1}$

f)  $f(x) = \frac{1-x}{(2x+1)^2}$

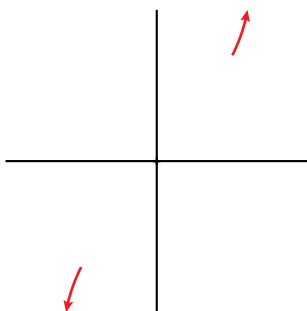
g)  $f(x) = \frac{x^3-x^2}{7-x^2}$

h)  $f(x) = \frac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9}$

Para calcular estos límites debemos tener en cuenta la regla de los grados del numerador y del denominador.

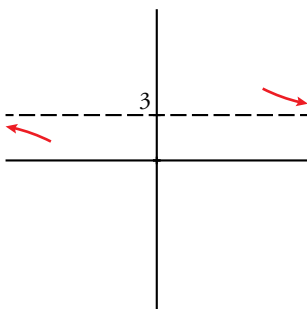
a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$



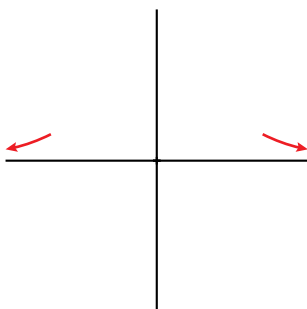
b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{(x-1)^2} = 3$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{(x-1)^2} = 3$



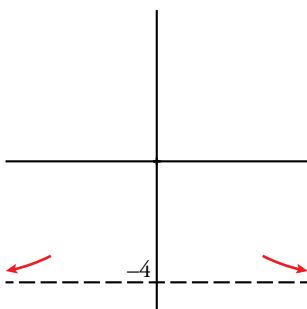
c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2-10} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2-10} = 0$



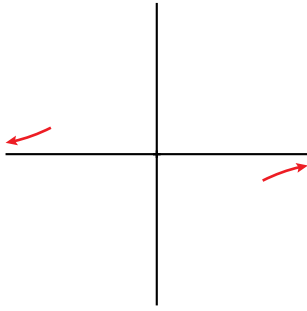
d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-12x^2}{3x^2} = -4$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-12x^2}{3x^2} = -4$



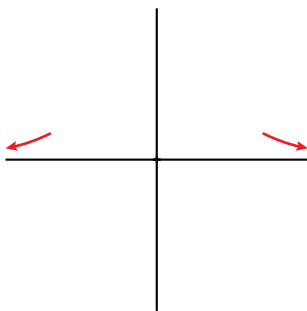
$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-2x}{x^2+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-2x}{x^2+1} = 0$$



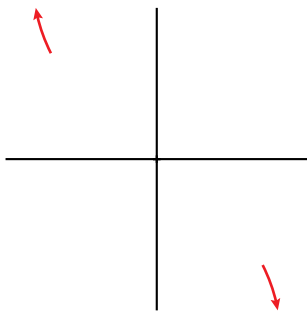
$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{(2x+1)^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{(2x+1)^2} = 0$$



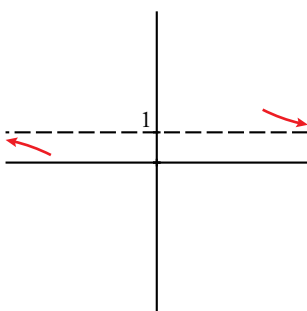
$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-x^2}{7-x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-x^2}{7-x^2} = +\infty$$



$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9} = 1$$



**22** Di cuál es el límite de las siguientes funciones cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ :

a)  $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

b)  $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (5 - x) = -\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - x) = +\infty$

**23** Di cuál es el límite de estas funciones cuando  $x \rightarrow +\infty$ :

a)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$

b)  $f(x) = \frac{-3}{x^2 + 2x - 4}$

c)  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$

d)  $f(x) = 3 - \frac{1}{x^2}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x^2 + 2x - 4} = 0$

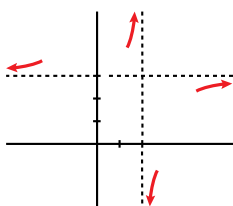
c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{x^2}\right) = 3$

**Página 179**

**Asíntotas**

**24**



Esta gráfica muestra la posición de la curva  $y = f(x)$  respecto de sus asíntotas.

Di cuáles son estas y describe su posición.

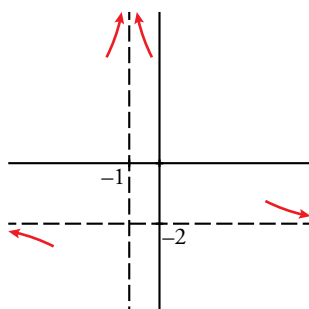
- Asíntota vertical:  $x = 2$   
Si  $x \rightarrow 2^-$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$   
Si  $x \rightarrow 2^+$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$
- Asíntota horizontal:  $y = 3$   
Si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) - 3 > 0$   
Si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) - 3 < 0$

**25** De una función  $y = f(x)$  conocemos sus asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas.

$x = -1 \begin{cases} \text{si } x \rightarrow -1^-, f(x) \rightarrow +\infty \\ \text{si } x \rightarrow -1^+, f(x) \rightarrow +\infty \end{cases}$

$y = -2 \begin{cases} \text{si } x \rightarrow +\infty, f(x) > -2 \\ \text{si } x \rightarrow -\infty, f(x) < -2 \end{cases}$

Representa esta información.



**26** Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

a)  $y = \frac{2x}{x-3}$

b)  $y = \frac{x-1}{x+3}$

c)  $y = \frac{2x+3}{4-x}$

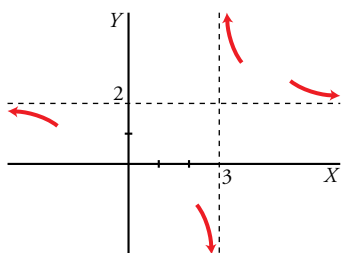
d)  $y = \frac{2}{1-x}$

e)  $y = \frac{1}{2-x}$

f)  $y = \frac{4x+1}{2x-3}$

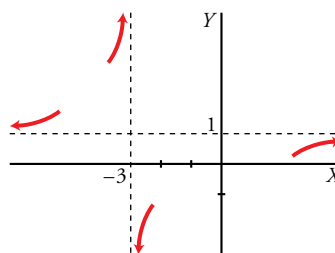
a) Asíntotas:

$x = 3; y = 2$



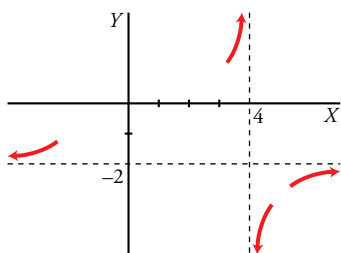
b) Asíntotas:

$x = -3; y = 1$



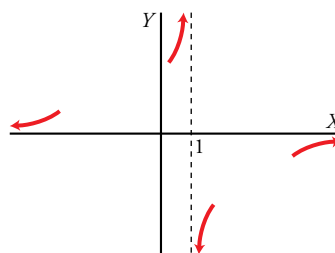
c) Asíntotas:

$x = 4; y = -2$



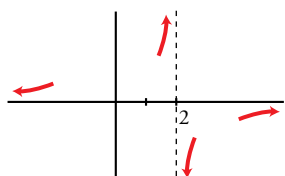
d) Asíntotas:

$x = 1; y = 0$



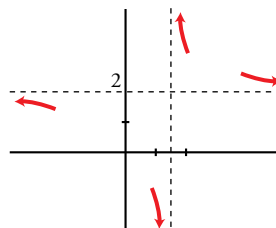
e) Asíntotas:

$x = 2; y = 0$



f) Asíntotas:

$x = \frac{3}{2}; y = 2$



**27** Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas:

a)  $y = \frac{x^2}{x^2+4}$

b)  $y = \frac{3}{x^2+1}$

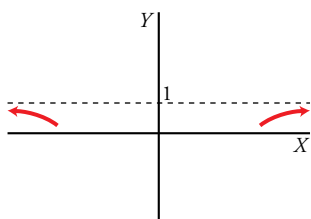
c)  $y = \frac{2x^2-1}{x^2}$

d)  $y = \frac{x^4}{x-1}$

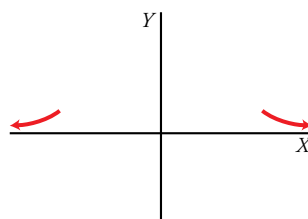
e)  $y = \frac{-1}{(x+2)^2}$

f)  $y = \frac{3x}{x^2-1}$

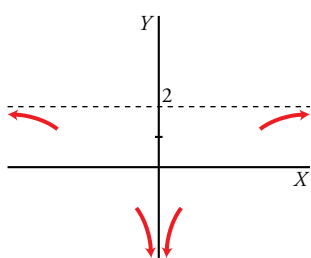
a) Asíntota:  $y = 1$



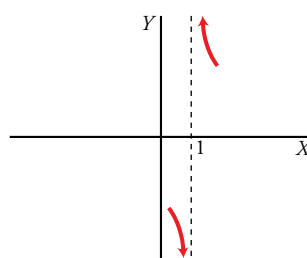
b) Asíntota:  $y = 0$



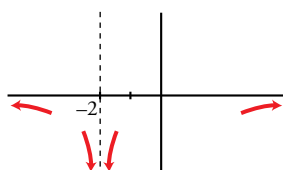
c) Asíntotas:  $x = 0$ ;  $y = 2$



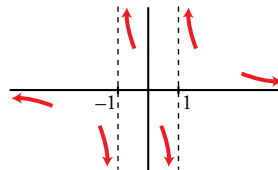
d) Asíntota:  $x = 1$



e) Asíntotas:  $x = -2$ ;  $y = 0$



f) Asíntotas:  $x = 1$ ,  $x = -1$ ;  $y = 0$



**28** Cada una de las siguientes funciones tiene una asíntota oblicua. Hállala y estudia la posición de la curva respecto a ella:

a)  $f(x) = \frac{3x^2}{x+1}$

b)  $f(x) = \frac{3+x-x^2}{x}$

c)  $f(x) = \frac{4x^2-3}{2x}$

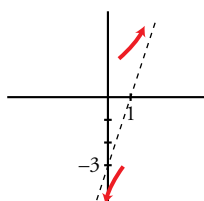
d)  $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-3}$

e)  $f(x) = \frac{2x^3-3}{x^2-2}$

f)  $f(x) = \frac{-2x^2+3}{2x-2}$

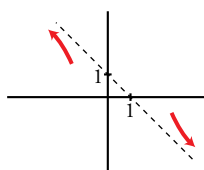
a)  $\frac{3x^2}{x+1} = 3x - 3 + \frac{3}{x+1}$

Asíntota oblicua:  $y = 3x - 3$



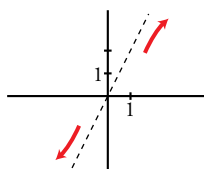
b)  $\frac{3+x-x^2}{x} = -x + 1 + \frac{3}{x}$

Asíntota oblicua:  $y = -x + 1$



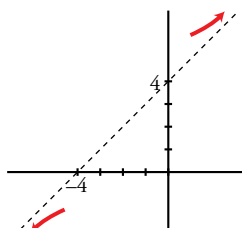
c)  $\frac{4x^2-3}{2x} = 2x - \frac{3}{2x}$

Asíntota oblicua:  $y = 2x$



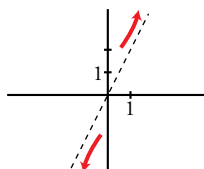
d)  $\frac{x^2+x-2}{x-3} = x + 4 + \frac{10}{x-3}$

Asíntota oblicua:  $y = x + 4$



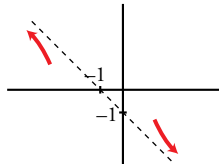
e)  $\frac{2x^3 - 3}{x^2 - 2} = 2x + \frac{4x - 3}{x^2 - 2}$

Asíntota oblicua:  $y = 2x$



f)  $\frac{-2x^2 + 3}{2x - 2} = -x - 1 + \frac{1}{2x - 2}$

Asíntota oblicua:  $y = -x - 1$



**29** Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

a)  $y = \frac{(3 - x)^2}{2x + 2}$

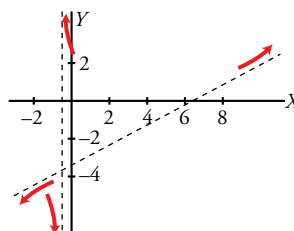
b)  $y = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$

c)  $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

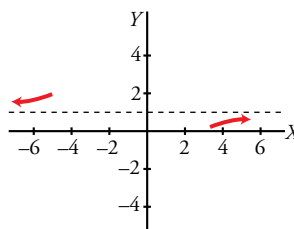
d)  $y = \frac{3x^2}{x + 2}$

a)  $y = \frac{1}{2}x - \frac{13}{4} + \frac{49/4}{2x + 1}$

Asíntotas:  $x = -\frac{1}{2}$ ;  $y = \frac{1}{2}x - \frac{13}{4}$

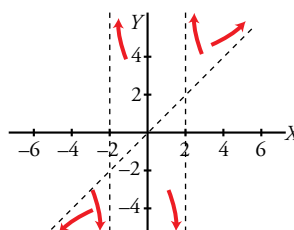


b) Asíntotas:  $y = 1$

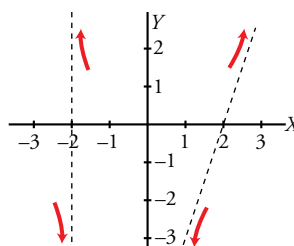


c)  $y = x + \frac{4x}{(x + 2)(x - 2)}$

Asíntotas:  $y = x$ ;  $x = -2$ ,  $x = 2$



d) Asíntotas:  $x = -2$ ;  $y = 3x - 6$





## Para resolver

**30** Calcula, en cada caso, el valor de  $k$  para que la función  $f(x)$  sea continua en todo  $\mathbb{R}$ .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 3 \\ x + k & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{c) } f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5 = f(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 + k \end{array} \right\} 5 = 3 + k \rightarrow k = 2$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + 2k = f(2) \end{array} \right\} 5 = 4 + 2k \rightarrow k = 1/2$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} = 1 \rightarrow k = 1$$

**31** Calcula  $k$  para que las siguientes funciones sean continuas en el punto donde cambia su definición:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -x^2 + kx & \text{si } x < 2 \\ k - 5x & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} & \text{si } x \neq 5 \\ k & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

a) Para que sea continua en  $x = 2$  debe ser  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ .

$$f(2) = k - 10$$

Como  $x = 2$  es un punto de ruptura, calculamos los límites laterales (que deben ser iguales):

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + kx) = -4 + 2k \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (k - 5x) = k - 10 \end{array} \right\} \rightarrow -4 + 2k = k - 10 \rightarrow k = -6$$

Con el valor  $k = -6$  se cumplen todas las condiciones para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 2$ .

b) Comenzamos estudiando la función en el punto de abscisa  $x = 5$ .

$$f(5) = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación.}$$

$$\frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \frac{(x+5)(x-5)}{x(x-5)} = \frac{x+5}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+5}{x} = 2$$

Si  $k = 2$ , la función es continua en  $x = 5$ .

Observamos que el denominador también se anula en  $x = 0$ , luego  $f(0)$  no existe. Además:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \frac{-25}{0} = \pm\infty$$

Por tanto, en  $x = 0$  tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I). En el resto de los puntos es continua.

**32** Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} e^{3-x} & \text{si } x \leq 3 \\ \log_2(x-2) & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) Las funciones de cada trozo son continuas porque son funciones elementales, bien definidas en sus respectivos intervalos de definición. Estudiamos la continuidad en el “punto de ruptura”, en  $x = 2$ .

$$f(2) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{2-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \text{El límite no existe porque los límites laterales son diferentes.}$$

En el punto de abscisa  $x = 2$  la función tiene una discontinuidad de salto finito (tipo II).

b) La función está formada por dos trozos de funciones continuas porque sus expresiones son elementales y están bien definidas en sus respectivos intervalos de definición. Estudiamos la continuidad en el punto de ruptura, en  $x = 3$ .

$$f(3) = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} e^{3-x} = e^0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \log_2(x-2) = \log_2 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{El límite no existe porque los límites laterales son diferentes.}$$

En el punto de abscisa  $x = 3$  la función tiene una discontinuidad de salto finito (tipo II).

**33** Determina  $a$  y  $b$  para que esta función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + b & \text{si } x < -2 \\ 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 3 \\ ax - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad en los puntos de ruptura.

•  $x = -2$

$$f(-2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} 3x + b = -6 + b \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} 4 = 4 \end{cases}$$

Por tanto,  $-6 + b = 4 \rightarrow b = 10$  para que exista el límite y la función sea continua en  $x = -2$ .

•  $x = 3$

$$f(3) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} 4 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} ax - 2 = 3a - 2 \end{cases}$$

Por tanto  $3a - 2 = 4 \rightarrow a = 2$  para que exista el límite y la función sea continua en  $x = 3$ .

Si  $a = 2$  y  $b = 10$  la función es continua en los puntos de ruptura. En los demás puntos también es continua por estar formada por trozos de rectas.

**34** Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{100x}{\sqrt[3]{x^2}}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{\sqrt{4-x^3}}$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6-7x}}{4x-2}$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x-2}$

Calcularemos estos límites usando el criterio de los grados del numerador y del denominador.

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{x} = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}} = 3$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{100x}{\sqrt[3]{x^2}} = -\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{\sqrt{4-x^3}} = 0$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6-7x}}{4x-2} = +\infty$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x-2} = \sqrt{2}$

**35** Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas:

a)  $y = 2^{x+3}$

b)  $y = 1,5^x - 1$

c)  $y = 2 + e^x$

d)  $y = e^{-x} + 1$

e)  $y = \log(x-3)$

f)  $y = 1 - \ln x$

g)  $y = \ln(2x+4)$

h)  $y = \ln(x^2+1)$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{x+3} = +\infty$  (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido).

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{x+3} = 0$  (asíntota horizontal).

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1,5^x - 1) = +\infty$  (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido).

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1,5^x - 1) = -1$  (asíntota horizontal).

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + e^x) = +\infty$  (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido).

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + e^x) = 2$  (asíntota horizontal).

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1$  (asíntota horizontal).

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$  (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido).

e) Su dominio es  $(3, +\infty)$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x-3) = +\infty$  (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más lento).

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \log(x-3) = -\infty$  (asíntota vertical).

f) Su dominio es  $(0, +\infty)$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$  (rama parabólica hacia abajo de crecimiento cada vez más lento).

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \ln x) = +\infty$  (asíntota vertical).

g) Su dominio es  $(-2, +\infty)$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x+4) = +\infty$  (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más lento).

$\lim_{x \rightarrow -2^+} \ln(2x+4) = -\infty$  (asíntota vertical).

h) Su dominio es  $\mathbb{R}$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$  (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más lento).

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$  (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más lento).

Página 180

**36** La función  $p(t) = \begin{cases} 2+t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{8t^2-t-1}{2t^2} & \text{si } t > 1 \end{cases}$  muestra cómo varía la profundidad de la capa de arena

de una playa desde la construcción de un dique ( $p$  en metros,  $t$  en años). Si la profundidad llega a superar los 4 m, se tendrá que elevar el paseo marítimo.

- a) Estudia si la profundidad es una función continua del tiempo.  
b) A largo plazo, ¿será necesario elevar la altura del paseo?

a) La función está formada por dos trozos.

La función del primero es continua por ser parte de una parábola.

La del segundo también lo es porque es parte de una función elemental bien definida para  $t > 1$ .

Estudiamos la continuidad en el punto de ruptura  $t = 1$ .

Comprobamos si  $\lim_{t \rightarrow 1} p(t) = p(1)$ :

$$p(1) = 3$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} p(t) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 1^-} p(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} (2+t^2) = 3 \\ \lim_{t \rightarrow 1^+} p(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{8t^2-t-1}{2t^2} = 3 \end{cases}$$

La función también es continua en  $t = 1$ .

b) Podemos estudiar el comportamiento de la función a largo plazo con el límite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{8t^2-t-1}{2t^2} = 4.$$

La profundidad no llega a alcanzar los 4 m porque, si bien tiende a 4, los valores que toma son inferiores a 4, ya que  $p(t) = \frac{8t^2-t-1}{2t^2} = 4 - \frac{t+1}{2t^2}$ .

Por tanto, no será necesario elevar la altura del paseo.

**37** La siguiente función representa la valoración de una empresa, en millones de euros, en función del tiempo,  $t$ , en los últimos 13 años.

$$f(t) = \begin{cases} 5 - 0,1t & \text{si } 0 \leq t < 5 \\ a + 0,05(t-5) & \text{si } 5 \leq t < 10 \\ 4,75 + 0,3(t-b) & \text{si } 10 \leq t \leq 13 \end{cases}$$

- a) Calcula el valor de  $a$  y de  $b$  para que la valoración de la empresa sea una función continua del tiempo.  
b) ¿Cuál era el valor inicial de la empresa? ¿Y su valor a los 13 años?

a) La función está formada por tres segmentos, luego su continuidad en función del tiempo depende de lo que ocurra en los puntos de ruptura.

• Continuidad en  $x = 5 \rightarrow \lim_{t \rightarrow 5} f(t) = f(5)$

$$f(5) = a$$

$$\lim_{t \rightarrow 5} f(t) = \left. \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 5^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 5^-} (5 - 0,1t) = 4,5 \\ \lim_{t \rightarrow 5^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} [a + 0,05(t-5)] = a \end{cases} \right\} \rightarrow a = 4,5$$

- Continuidad en  $x = 10 \rightarrow \lim_{t \rightarrow 10} f(t) = f(10)$

$$f(10) = 4,75 + 0,3(10 - b) = 7,75 - 0,3b$$

$$\lim_{t \rightarrow 10} f(t) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 10^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 10^-} [4,5 + 0,05(t - 5)] = 4,75 \\ \lim_{t \rightarrow 10^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 10^+} [4,75 + 0,3(t - b)] = 7,75 - 0,3b \end{array} \right\} \rightarrow 4,75 = 7,75 - 0,3b \rightarrow b = 10$$

Si  $a = 4,5$  y  $b = 10$ , la función siempre es continua.

- b) El valor inicial es  $f(0) = 5$  millones de euros.

El valor a los 13 años es  $f(13) = 4,75 + 0,3(13 - 10) = 5,65$  millones de euros.

**38** El tipo de interés anual que ofrece una financiera depende del tiempo que el cliente esté dispuesto a mantener la inversión, y viene dado por la función  $I(t) = \frac{6t}{t+1}$ ,  $t > 0$ , en años.

- a) Representa la función para un periodo de 10 años.

- b) ¿A qué valor tiende el interés si la inversión se mantiene a muy largo plazo?

- a)  $I(t) = \frac{6t}{t+1} = 6 + \frac{-6}{t+1}$  tiene una gráfica similar a la de la función  $y = \frac{-1}{x}$  desplazada en ambos ejes y estirada en el sentido del eje vertical.

Evaluamos en los extremos del intervalo de definición:

$$I(0) = 0, \quad I(10) = \frac{60}{11} \approx 5,5$$



- b) Si la inversión se mantiene a muy largo plazo, el tipo de interés tiende a:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6t}{t+1} = 6$$

**39** En una empresa se hacen montajes en cadena. El número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento según la función  $M(t) = \frac{30t}{t+4}$  ( $t$  en días).

- a) ¿Cuántos montajes realizará al terminar el periodo de entrenamiento que dura 20 días?

- b) Halla la asíntota horizontal y explica su significado.

- a) Hará  $M(20) = 25$  montajes.

- b)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t+4} = 30$

Significa que el número de montajes tiende a estabilizarse en 30.

**40** El número de peces de una piscifactoría evoluciona según la función  $f(t) = 50 + \frac{100t^2}{t^2 + 1}$  ( $t$  en días).

- a) Comprueba que la población aumenta la primera semana.  
b) Averigua si el crecimiento será indefinido o tiende a estabilizarse.

a) Calculamos una tabla con los valores de la primera semana.

<b>t</b>	0	1	2	3	4	5	6
<b>f(t)</b>	50	100	130	140	144	146	147

Podemos comprobar que el número crece pero de una forma cada vez más lenta.

b) Para estudiar el comportamiento de la función a largo plazo podemos calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 50 + \frac{100t^2}{t^2 + 1} \right) = 150$ .

Este resultado indica claramente que el crecimiento tiende a estabilizarse.

**41** El coste de la producción de  $x$  unidades de un artículo viene dado por la función  $C(x) = 0,5x + 1\,000$ . El coste de una unidad depende del número de unidades producidas.

- a) ¿Cuál es la función que da el coste de una unidad si se producen  $x$  unidades?  
b) Calcula su asíntota horizontal y explica su significado.

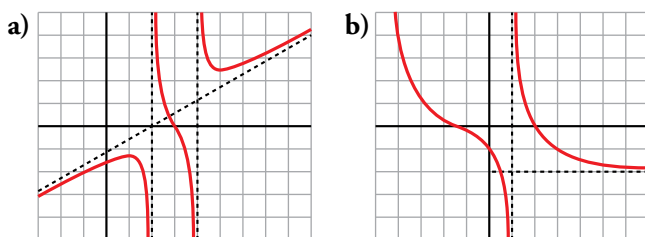
a) El coste por unidad se obtiene dividiendo el coste de la producción entre el número de unidades producidas:

$$f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{0,5x + 1000}{x} = 0,5 + \frac{1000}{x} \text{ es el coste por unidad.}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 0,5 + \frac{1000}{x} \right) = 0,5 \rightarrow y = 0,5$  es la asíntota horizontal.

Cuando el número de unidades producidas aumenta indefinidamente, el coste por unidad se estabiliza en 0,5, siendo siempre superior a esta cantidad.

**42** Observa la gráfica de las siguientes funciones y describe sus ramas infinitas, sus asíntotas y la posición de la curva respecto de ellas:



a) Asíntotas verticales: rectas  $x = 2$  y  $x = 4$ .

Posición:

Si  $x \rightarrow 2^-$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$

Si  $x \rightarrow 2^+$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$

Si  $x \rightarrow 4^-$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$

Si  $x \rightarrow 4^+$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$

Asíntota oblicua: recta  $y = \frac{x}{2} - 1$

Posición:

Si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > \frac{x}{2} - 1$

Si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < \frac{x}{2} - 1$

b) Asíntotas verticales: recta  $x = 1$

Si  $x \rightarrow 1^+$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$

Si  $x \rightarrow 1^-$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$

Asíntota horizontal: recta  $x = -2$  en  $+\infty$

Si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 2$

Rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido en  $-\infty$ .

**43** Representa, en cada caso, una función que cumpla las condiciones dadas.

a)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ ,  $f(x) < 3$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) Asíntota vertical:  $x = 1$

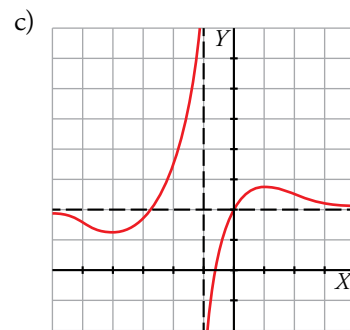
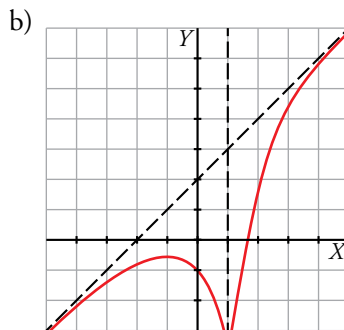
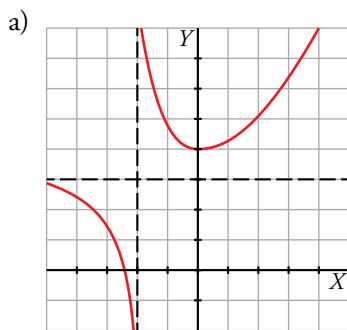
$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

Asíntota oblicua:  $y = x + 2$

diferencia  $[f(x) - y] < 0$  si  $x \rightarrow \pm\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ,  $f(x) > 2$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ ,  $f(x) < 2$



**44** Determina el valor de  $a$  y de  $b$  de modo que las rectas  $x = -1$  e  $y = \frac{3}{2}$  sean asíntotas de la función  $f(x) = \frac{ax + 3}{bx - 4}$ . Después, representa la posición de la curva respecto a ellas.

- Para que la recta  $x = -1$  sea una asíntota de  $f(x)$ , el denominador se debe anular en la abscisa dada. Por tanto:

$b \cdot (-1) - 4 = 0 \rightarrow b = -4$

- Para que la recta  $y = \frac{3}{2}$  sea una asíntota horizontal, debe ser  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{3}{2}$ .

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax + 3}{-4x - 4} = -\frac{a}{4}$  por ser un cociente de polinomios del mismo grado.

$-\frac{a}{4} = \frac{3}{2} \rightarrow a = -6 \rightarrow$  La función es  $f(x) = \frac{-6x + 3}{-4x - 4}$ .

**Posición**

- Respecto de la asíntota  $x = -1$ :

IZQUIERDA:  $x = -1,01 \rightarrow f(-1,01) = \frac{-6(-1,01) + 3}{-4(-1,01) - 4} = 226,5 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$

DERECHA:  $x = -0,99 \rightarrow f(-0,99) = \frac{-6(-0,99) + 3}{-4(-0,99) - 4} = -223,5 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

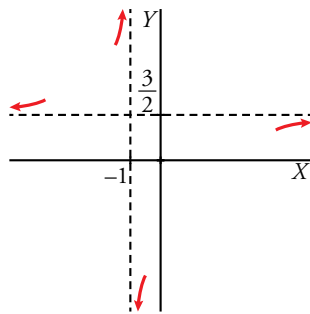
- Respecto de la asíntota  $y = \frac{3}{2}$ :

$$\text{Calculamos } f(x) - \frac{3}{2} = \frac{-6x+3}{-4x-4} - \frac{3}{2} = \frac{-9}{4(x+1)}$$

$$(x \rightarrow +\infty) \rightarrow f(x) - \frac{3}{2} < 0 \rightarrow f(x) \text{ está debajo de la asíntota.}$$

$$(x \rightarrow -\infty) \rightarrow f(x) - \frac{3}{2} > 0 \rightarrow f(x) \text{ está encima de la asíntota.}$$

$$y = \frac{-6x+3}{-4x-4}$$



- 45** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 2 \\ 4x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ , calcula los valores de  $a$  y de  $b$  para que  $f$  sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

Para que su gráfica pase por el origen de coordenadas,  $f(0) = 0$ .

$$f(0) = b, \text{ de donde } b = 0.$$

La función es continua siempre que  $x \neq 2$ , porque está formada por un trozo de parábola y otro de recta.

Ahora imponemos la continuidad en  $x = 2$ , es decir,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ .

$$f(2) = 4 + 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + ax) = 4 + 2a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (4x - 2) = 6 \end{cases} \rightarrow 4 + 2a = 6 \rightarrow a = 1$$

Si  $a = 1$  y  $b = 0$ , la función es continua y pasa por el origen de coordenadas.

- 46** Determina, en cada caso, cuál debe ser el valor de  $a$  para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax+3}{3x-1} = -1$       b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2-2x+7}{1-3x^2} = -2$

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax+3}{3x-1} = \frac{2a+3}{5} \rightarrow \frac{2a+3}{5} = -1 \rightarrow a = -4$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2-2x+7}{1-3x^2} = -\frac{a}{3} \rightarrow -\frac{a}{3} = -2 \rightarrow a = 6$



**47** Estudia el tipo de discontinuidad que presenta la función  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9}$  en  $x = 3$  y en  $x = -3$ .

- Caso  $x = 3$

$f(3)$  no existe porque se produce una división entre 0.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = \left( \frac{54}{0} \right) = \pm \infty$$

Estudiamos los límites laterales:

$$\text{IZQUIERDA: } x = 2,99 \rightarrow f(2,99) = \frac{2,99^3 + 2 \cdot 2,99^2 + 9}{2,99^2 - 9} = -895,01 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = -\infty$$

$$\text{DERECHA: } x = 3,01 \rightarrow f(3,01) = \frac{3,01^3 + 2 \cdot 3,01^2 + 9}{3,01^2 - 9} = 905,01 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = +\infty$$

En  $x = 3$  presenta una discontinuidad de salto infinito (tipo I).

- Caso  $x = -3$

$f(-3)$  no existe porque se produce una división entre 0.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = \left( \frac{0}{0} \right) \rightarrow \text{Indeterminación.}$$

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = \frac{(x^2 - x + 3)(x + 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{x^2 - x + 3}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x + 3}{x - 3} = -\frac{5}{2}$$

En  $x = -3$  presenta una discontinuidad evitable (tipo III), ya que existe el límite pero la función no está definida.

## Página 181

### Cuestiones teóricas

**48** ¿Verdadero o falso? Justifica la respuesta y pon ejemplos.

- Si no existe  $f(2)$ , no se puede calcular  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .
  - Si no existe  $f(1)$ ,  $f(x)$  no puede ser continua en  $x = 1$ .
  - Una función no puede tener más de dos asíntotas horizontales.
  - Una función puede tener tres asíntotas verticales.
  - Si  $g(a) = 0$  podemos afirmar que  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  tiene asíntota vertical.
  - La función  $y = 2^{-x}$  no tiene asíntotas.
- Falso. En una discontinuidad evitable de tipo III no existe la función en un punto pero sí existe el límite.
  - Verdadero, ya que no se cumple una de las condiciones de la continuidad.
  - Verdadero. Si tuviera tres o más asíntotas horizontales, dos de ellas coincidirían por uno de los extremos del eje  $OX$  y esto es imposible porque la función no puede tender simultáneamente a dos resultados diferentes.
  - Verdadero. Incluso puede tener infinitas asíntotas verticales, como ocurre con la función  $y = \operatorname{tg} x$ .
  - Falso. Si  $f(a) = 0$ , puede ocurrir que la función tenga una discontinuidad evitable en  $x = a$ .
  - Falso. Porque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^x} = 0$  y la recta  $y = 0$  es una asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

**49** Explica, en cada caso, cómo debe ser el numerador de la fracción  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{-----}}{2x^2 - 5x + 3}$  para que el resultado sea:

- a)  $+\infty$       b)  $-\infty$       c) 0      d) 3

- a) Debe ser un polinomio de grados 3 o superior en el que el coeficiente del término de mayor grado sea positivo.  
 b) Debe ser un polinomio de grado 3 o superior de forma que el coeficiente del término de mayor grado sea negativo.  
 c) Debe ser un polinomio de grado 1 o inferior.  
 d) Debe ser un polinomio de grado 2 en el que el término en  $x^2$  sea  $6x^2$ .

**50** Dada la función  $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + b$ , justifica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) Si  $a > 0$  y  $n$  es par, entonces  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .  
 b) Si  $a > 0$  y  $n$  es impar, entonces  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .  
 c) Si  $a < 0$  y  $n$  es par, entonces  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .  
 d) Si  $a < 0$  y  $n$  es impar, entonces  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

a) Falso.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = +\infty \text{ porque } ax^n > 0 \text{ al ser } n \text{ par y } a > 0.$$

b) Falso.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = -\infty \text{ porque } ax^n < 0 \text{ al ser } n \text{ impar y } a > 0.$$

c) Verdadero.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = -\infty \text{ porque } ax^n < 0 \text{ al ser } n \text{ par y } a < 0.$$

d) Verdadero.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = +\infty \text{ porque } ax^n > 0 \text{ al ser } n \text{ impar y } a < 0.$$

**51** ¿Existe algún valor de  $b$  para el cual sea continua la función  $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ -2x + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$ ?

**Justifica tu respuesta.**

La función no puede ser continua en  $x = 1$  para ningún valor de  $b$  porque  $f(1) = 4$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x - 2) = 1$$

Por tanto:

- El límite existe, vale 1 y es distinto de  $f(1) = 4 \rightarrow$  Tendría una discontinuidad evitable (tipo IV).

O bien:

- El límite no existe por ser distintos los límites laterales  $\rightarrow$  Tendría una discontinuidad de salto finito (tipo II).

## Para profundizar

- 52** Calcula  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x}{x - 1} - ax$  en los casos  $a > 3$  y  $0 < a < 3$ . ¿Para qué valor de  $a$  es el límite un número real? ¿Cuál es ese límite?

$$\frac{3x^2 - 5x}{x - 1} - ax = \frac{3x^2 - 5x - ax^2 + ax}{x - 1} = \frac{(3 - a)x^2 + (a - 5)x}{x - 1}$$

- $a > 3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3 - a)x^2 + (a - 5)x}{x - 1} = -\infty, \text{ ya que el coeficiente de } x^2 \text{ sería negativo.}$$

- $0 < a < 3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3 - a)x^2 + (a - 5)x}{x - 1} = +\infty, \text{ ya que el coeficiente de } x^2 \text{ sería positivo.}$$

- Para que el límite sea un número real, el resultado de la operación  $\frac{3x^2 - 5x}{x - 1} - ax$  debe ser un cociente de polinomios del mismo grado, es decir, el grado del numerador debe ser 1.

$$\frac{(3 - a)x^2 + (a - 5)x}{x - 1} \rightarrow 3 - a = 0 \rightarrow a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2 - 5x}{x - 1} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x - 1} = -2$$

- 53** Halla los siguientes límites (utiliza la calculadora).

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^5}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x + 3)}{x^2}$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x - x^4)$

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (0,75^x - x^2)$

a)  $x = 50 \rightarrow \frac{50^3}{e^{50}} = 2,41 \cdot 10^{-17} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$

b)  $x = 1000 \rightarrow \frac{1000}{\ln 1000} = 144,76 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$

c)  $x = 50 \rightarrow \frac{e^{50} - 1}{50^5} = 1,66 \cdot 10^{13} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^5} = +\infty$

d)  $x = 1000 \rightarrow \frac{\ln(2 \cdot 1000 + 3)}{1000^2} = 7,6 \cdot 10^{-6} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x + 3)}{x^2} = 0$

e)  $x = 50 \rightarrow 2^{50} - 50^4 = 1,13 \cdot 10^{15} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x - x^4) = +\infty$

f)  $x = -50 \rightarrow 0,75^{-50} - (-50)^2 = 1,76 \cdot 10^6 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (0,75^x - x^2) = +\infty$

- 54** a) Halla  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$ . Para ello, multiplica numerador y denominador por el binomio conjugado  $(\sqrt{x} + 1)$  del denominador.

b) Con el mismo procedimiento, calcula  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ .

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \left( \frac{0}{0} \right) \rightarrow$  Indeterminación.

$$\frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1} = \sqrt{x} + 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} + 1 = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \left(\frac{0}{0}\right) \rightarrow \text{Indeterminación.}$$

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

**55** Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x-2| \qquad b) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x|x| \qquad c) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|}{x-2} \qquad d) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x-2|}{2x}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} |x-2| = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x-2| = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-(x-2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+2) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x|x| = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} x|x| = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(-x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-2} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x-2} = -1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-2|}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{2x} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-2|}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(x-2)}{2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x+2}{2x} = -\frac{1}{2}$$

**56** Halla las asíntotas de las funciones siguientes:

$$a) f(x) = \frac{|2x|}{x-2} \qquad b) f(x) = \frac{|x-2|}{x}$$

- a) • Asíntota vertical  $x = 2$ .

$$\text{Posición} \begin{cases} \text{Si } x \rightarrow 2^-, f(x) \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x \rightarrow 2^+, f(x) \rightarrow +\infty \end{cases}$$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|2x|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-2} = 2$$

La recta  $y = 2$  es una asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x-2} = -2$$

La recta  $y = -2$  es una asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

- b) • Asíntota vertical  $x = 0$ .

$$\text{Posición:} \begin{cases} \text{Si } x \rightarrow 0^-, f(x) \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x \rightarrow 0^+, f(x) \rightarrow +\infty \end{cases}$$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-2|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x} = 1$$

La recta  $y = 1$  es una asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-2|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+2}{x} = -1$$

La recta  $y = -1$  es una asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

## Autoevaluación

- 1** Calcula el límite de  $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2 - x - 7, & x > 3 \end{cases}$  en los puntos de abscisas 0, 3 y 5. Di si la función es continua en esos puntos.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2 - x - 7, & x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \cdot 3 - 5 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3^2 - 3 - 7 = -1 \end{array} \right. \text{ No tiene límite en } x = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 5^2 - 5 - 7 = 13$$

Es continua en  $x = 0$  y en  $x = 5$ . No es continua en  $x = 3$ , porque no tiene límite en ese punto.

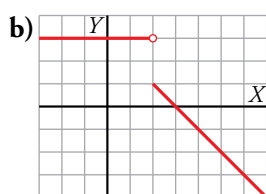
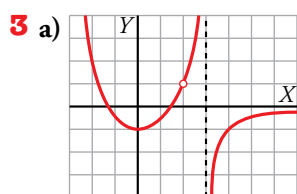
- 2** Halla los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{x-1}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}}$       c)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{(x-4)^2}$

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{x-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{(x-4)^2} = +\infty$  (Si  $x \rightarrow 4^+$  o si  $x \rightarrow 4^-$ , los valores de la función son positivos).



Sobre la gráfica de estas dos funciones, halla, en cada caso, los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right. \text{ No tiene límite en } x = 3.$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \end{array} \right. \text{ No tiene límite en } x = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$$

**4** Halla las asíntotas de la función  $f(x) = \frac{2x+1}{4-x}$  y estudia la posición de la curva respecto a ellas.

El dominio de definición de  $f(x)$  es  $\mathbb{R} - \{4\}$ .

- Estudiamos lo que ocurre en  $x = 4$ :

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1}{4-x} = \frac{9}{0} = \pm\infty \rightarrow \text{La recta } x = 4 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Posición:

$$\text{IZQUIERDA: } x = 3,99 \rightarrow \frac{2 \cdot 3,99 + 1}{4 - 3,99} = 898 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x+1}{4-x} = +\infty$$

$$\text{DERECHA: } x = 4,01 \rightarrow \frac{2 \cdot 4,01 + 1}{4 - 4,01} = -902 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x+1}{4-x} = -\infty$$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{4-x} = -2 \rightarrow \text{La recta } y = -2 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Posición:

$$\text{Calculamos } f(x) - (-2) = \frac{2x+1}{4-x} + 2 = \frac{9}{4-x}$$

Si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) - (-2) < 0 \rightarrow$  La función está por debajo de la asíntota.

Si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) - (-2) > 0 \rightarrow$  La función está por encima de la asíntota.

**5** Justifica qué valor debe tomar  $a$  para que la función  $f(x) = \begin{cases} ax-2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x-2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$  sea continua en  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = \begin{cases} ax-2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x-2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función es continua para valores de  $x$  menores que 1 y mayores que 1, porque ambos tramos son rectas.

Para que sea continua en  $x = 1$ , debe cumplirse:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$f(1) = a - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a - 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 - 2a \end{array} \right.$$

Para que exista el límite, debe ser:  $a - 2 = 4 - 2a \rightarrow 3a = 6 \rightarrow a = 2$

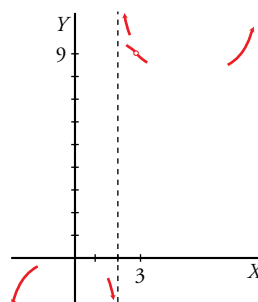
**6** Halla el límite de  $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6}$  cuando  $x \rightarrow 3$ ;  $x \rightarrow 2$ ;  $x \rightarrow +\infty$ ;  $x \rightarrow -\infty$  y representa la información que obtengas.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{0}{0}$$

$$\text{Simplificamos: } \frac{x^2(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x^2}{x-2}$$

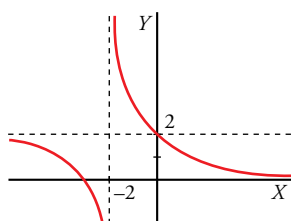
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{x-2} = 9$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x - 2} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{cases} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x - 2} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x - 2} = -\infty \end{aligned}$$



7 Representa una función que cumpla las siguientes condiciones:

- a)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$       b)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$       c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$       d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$



8 Estudia las ramas infinitas de  $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$  y sitúa la curva respecto a su asíntota.

Como el dominio de  $f$  es  $\mathbb{R} - \{2\}$ , estudiamos la existencia de asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x-2} = \left(\frac{4}{0}\right) = \pm\infty \rightarrow \text{La recta } x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Posición:

- IZQUIERDA:  $x = 1,99 \rightarrow \frac{1,99^2}{1,99-2} = -396,01 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x-2} = -\infty$
- DERECHA:  $x = 2,01 \rightarrow \frac{2,01^2}{2,01-2} = 404,01 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x-2} = +\infty$

Por otra parte,  $f(x) = \frac{x^2}{x-2} = x + 2 + \frac{4}{x-2} \rightarrow$  La recta  $y = x + 2$  es una asíntota oblicua de la función.

Posición:

$$\text{Calculamos } f(x) - (x + 2) = \frac{4}{x-2}:$$

- Si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) - (x + 2) > 0 \rightarrow$  La función está por encima de la asíntota oblicua.
- Si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) - (x + 2) < 0 \rightarrow$  La función está por debajo de la asíntota oblicua.